CHAPITRE 03

Analyse de la décision dans le Risque

1. Introduction

- Décisions dans l'incertitude et décisions dans le risque :
  - Décision dans **l'incertitude** : situations de choix où les **résultats des actions ne peuvent être prévus avec certitude**.
  - On suppose que cette incertitude est **probabilisée**, c'est à dire que le résultat obtenu ne dépend que de la réalisation d'événements de probabilités connues. On utilise alors le terme de « **décision dans le risque** »

En fait il y a 2 écoles de pensée :

- **L'école « bayésienne »** (du nom de Bayes), fondée par De Finetti et Savage, qui soutient que : « tout décideur rationnel doit se comporter comme si tous les événements avaient des probabilités, celles-ci pouvant varier d'une personne à l'autre » d'où leur dénomination de "probabilités subjectives "
- **L'école « non-bayésienne »** (plus statistique) considère les situations de risque comme un **cas particulier des situations d'incertitude** : c'est le comportement du décideur qui permet de reconnaître s'il attribue des probabilités aux événements et, si oui, quelles sont leurs valeurs.

Problématique de la décision face au risque

- Dans la décision face au risque, on considère que les **probabilités** de chaque état sj ! S, ou S est l'ensemble des **états de la nature**, sont **connues** :

$$\boldsymbol{p(s_j) = p_j , \forall j}$$

- Si le décideur $d_i \in \boldsymbol{D}$ et que $s_j \in$ se réalise, il en résulte que la conséquence $c_k \in \boldsymbol{C}$, où **C** est l'ensemble des **conséquences** sur lequel est définie une **fonction d'utilité U**(c_k).

  => Une décision est alors une application de S dans C

On peut considérer que **l'utilité U** correspond aux résultats monétaires de la décision :

Exemple : **jeu de pile ou face (100 € d'enjeu)** :

matrice des résultats :

D \ S	Pile (P)	Face (F)
Choix Pile	U(+100)	U(-100)
Choix Face	U(-100)	U(+100)

Problème :

- Comment choisir, dans l'ensemble des stratégies la plus avantageuse, sur la base de l'information disponible (S, C, U) ?
- **Plusieurs critères sont possibles :**

- Critère de Pascal (critère de l'Espérance Mathématique ou Espérance Mathématique de Gain - **EMG**) :
    - **Adapté à des risques peu élevés**
    - **Lorsque le risque est plus élevé**, **l'aversion pour le risque** doit être considérée et l'on a recours à d'autres critères (**Critères de Markowitz, de Bernouilli, …)**

2. Critères pour la décision dans le risque

Critère de Pascal : Maximum de l'Espérance Mathématique

Soit un ensemble D à 2 décisions D= {d1, d2} avec la matrice des résultats :

D \ S	s_1 (p_1)	S_2 (p_2)	…	S_j (p_j)	…	S_J (p_J)
d_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1J}
d_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	$a2_J$

- Si ∀ j : $a_{1j} > a_{2j}$, alors d_1 domine d_2
- **L'espérance mathématique** se calcule ainsi :

$$E[d_i] = \sum_{j=1}^{J} p_j a_{ij}$$

- Le choix de la meilleure décision correspond à la **maximisation de l'espérance mathématique** de chaque décision, soit :

$$Max_i \sum_{j=1}^{J} p_j a_{ij}$$

Exemple : jeu de pile ou face (100 € d'enjeu) :

- Nous avons la matrice des résultats suivante :

Etats de S / Décisions de D	Pile (P) (p1=0,5)	Face (F) (p2=0,5)	E[di]
Choix Pile (d_1)	+100	-100	0
Choix Face (d_2)	-100	+100	0

- **Calcul de l'Espérance Mathématique ($E[d_i]$) :**
    - $E[d_1]$ = (+100x0,5)+(-100x0,5) = 0
    - $E[d_2]$ = (-100x0,5)+(+100x0,5) = 0

D'où les décisions Choix Pile (d_1) et Choix Face (d_2) sont indifférentes

Cas 1 : énoncé :

Un commerçant doit commander en début de saison un lot de vêtements auprès d'un fabricant qui ne pratique pas le réassortiment en cours de saison :

- il choisit entre **3 types de décisions** de commande (**Faible, Moyenne, Elevée**) et
- il considère **3 états de la demande** (**Basse, Moyenne, Forte**),

Ce qui le conduit en s'appuyant sur son expérience des années passées, à la **matrice de décision** (matrice des gains) suivantes (en K €) :

Etats de S Décisions de D	Basse (s_1)	Moyenne (s_2)	Forte (s_3)
Faible (d_1)	100	100	100
Moyenne (d_2)	60	150	150
Elevée (d_3)	10	120	200

Avec :

- D = ensemble des décisions {Faible, Moyenne, Elevée}
- S = ensemble des situations possibles {Basse, Moyenne, Forte}

Critère de Pascal : résolution du cas 1

• Dans la **décision face au risque**, on considère que les **probabilités de chaque état sj sont connues** :

Etats de S Décisions de D	Basse (s_1) p_1=0,2	Moyenne (s_2) P_2=0,5	Forte (s_3) P_3=0,3	**E[d_i]**
Faible (d_1)	100	100	100	**100**
Moyenne (d_2)	60	150	150	**132**
Elevée (d_3)	10	120	200	**122**

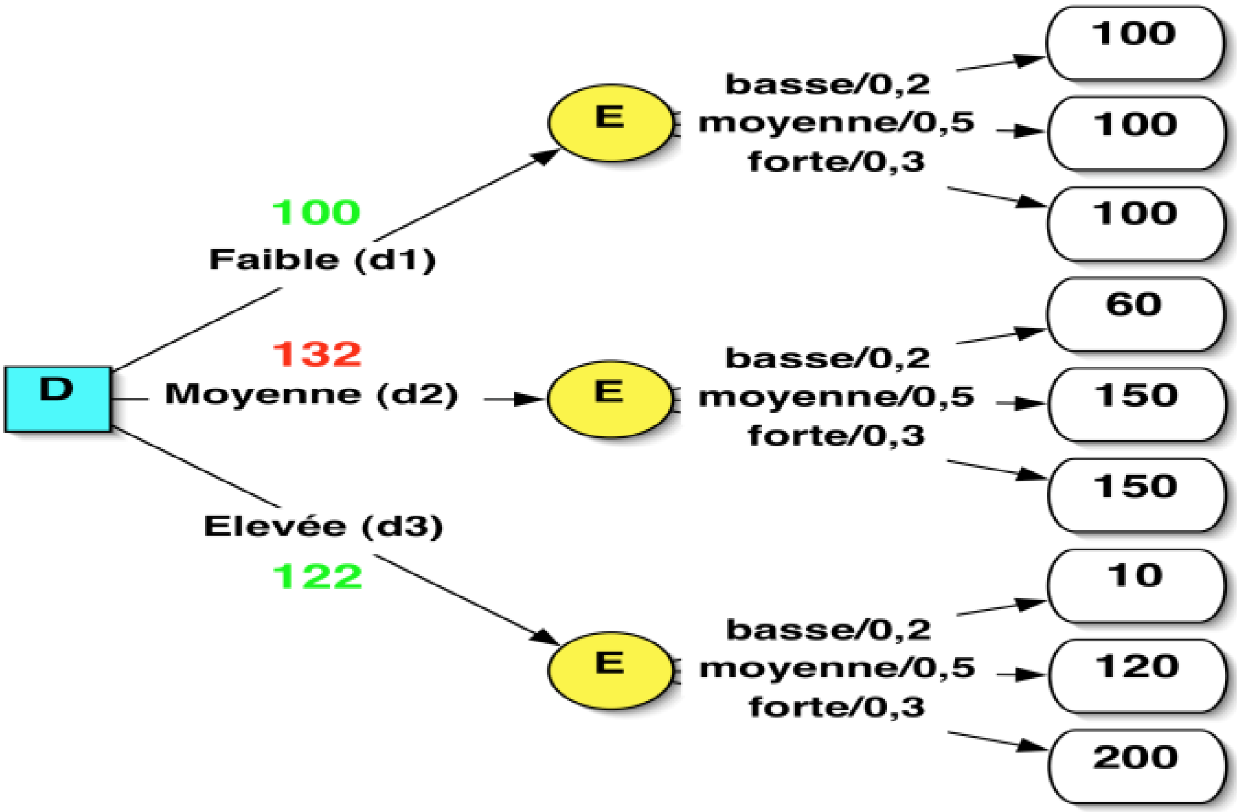
- Calcul de l'Espérance Mathématique (E[di]) :
  - E[d1] = (100x0,2)+(100x0,5)+(100x0,3) = 100
  - E[d2] = (60x0,2)+(150x0,5)+(200x0,3) = 132
  - E[d3] = (10x0,2)+(120x0,5)+(200x0,3) = 122
- On en conclut que :
  - **La décision d_2 domine les 2 autres décisions (E[d_2] = 132)**
  - **La décision d_3 est à la fois risquée (utilité mini = 10) et d'espérance moindre que la décision d_2 (122 < 132)**

Critère de Pascal : résolution du cas 1 par arbre de décision

Matrice des résultats :

Etats de S Décisions de D	Basse (s_1) p_1=0,2	Moyenne (s_2) P_2=0,5	Forte (s_3) P_3=0,3	**E[d_i]**
Faible (d_1)	100	100	100	**100**
Moyenne (d_2)	60	150	150	**132**
Elevée (d_3)	10	120	200	**122**

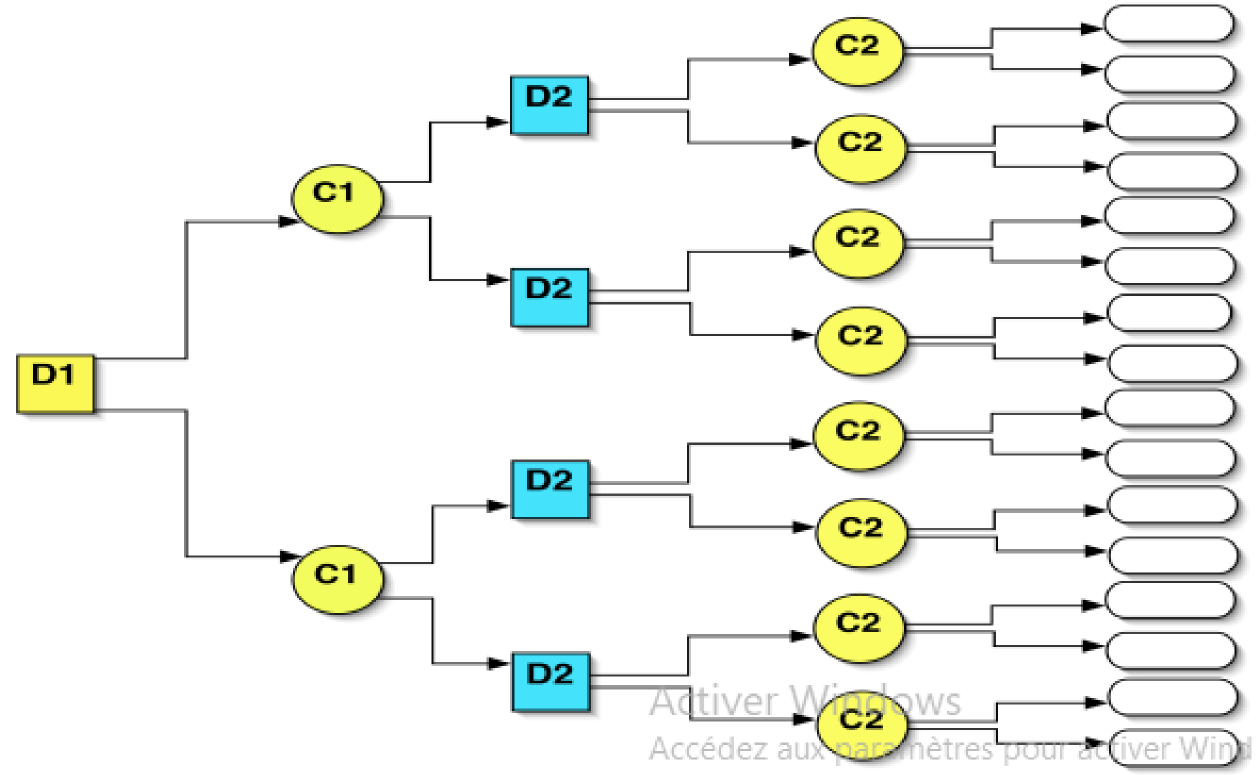
Arbre associé

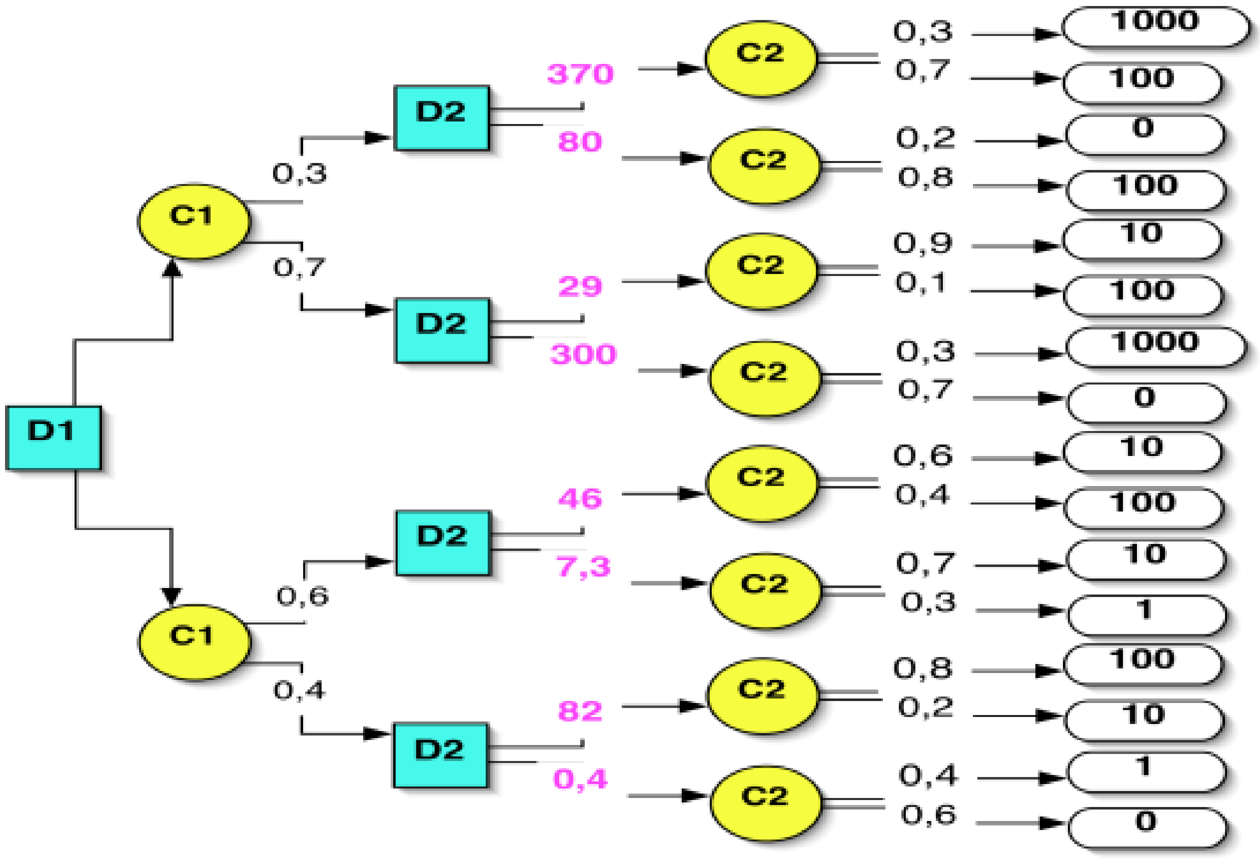


Décisions séquentielles

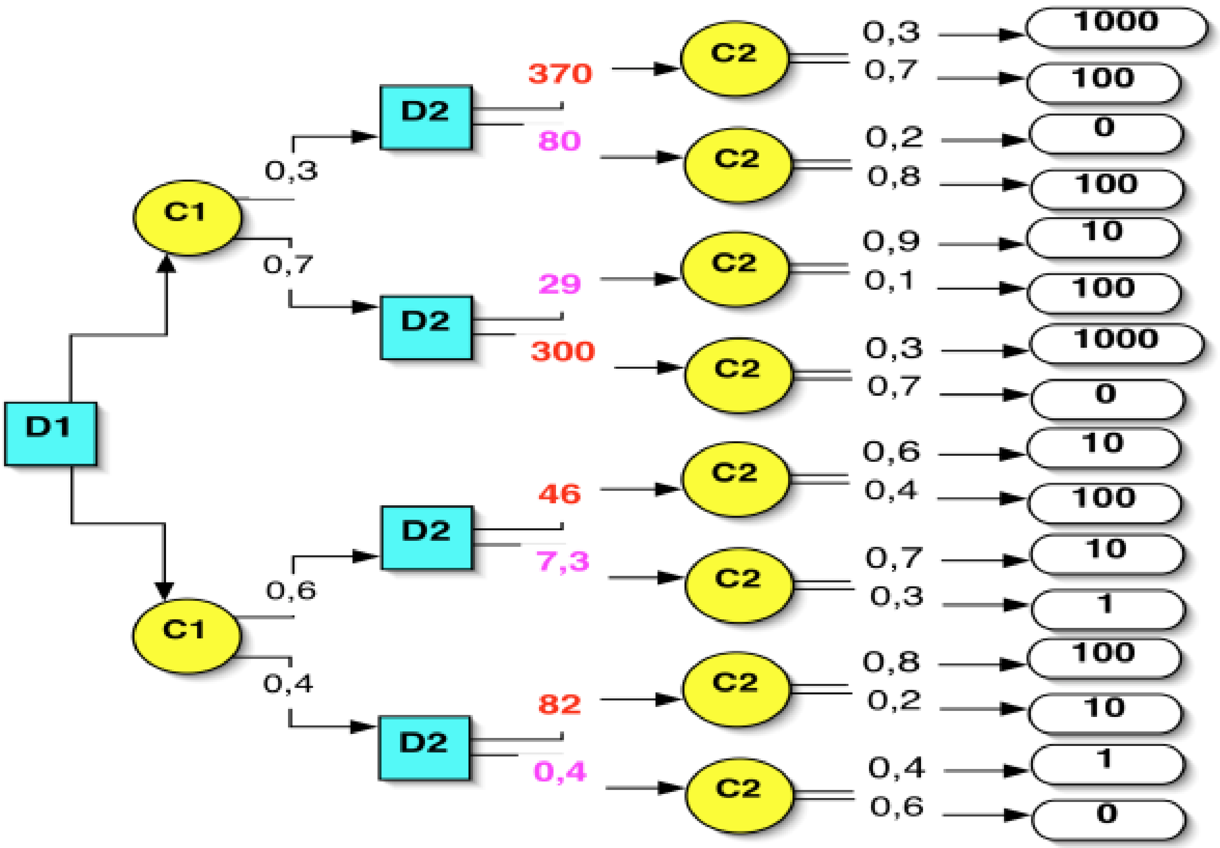
- Plusieurs décisions d'enchaînent les unes à la suite de l'autres
- Entre 2 décisions Di et D i+1, on possède de nouvelles observations (nœuds d'événement ou nœuds de chance)

- **Exemple :**

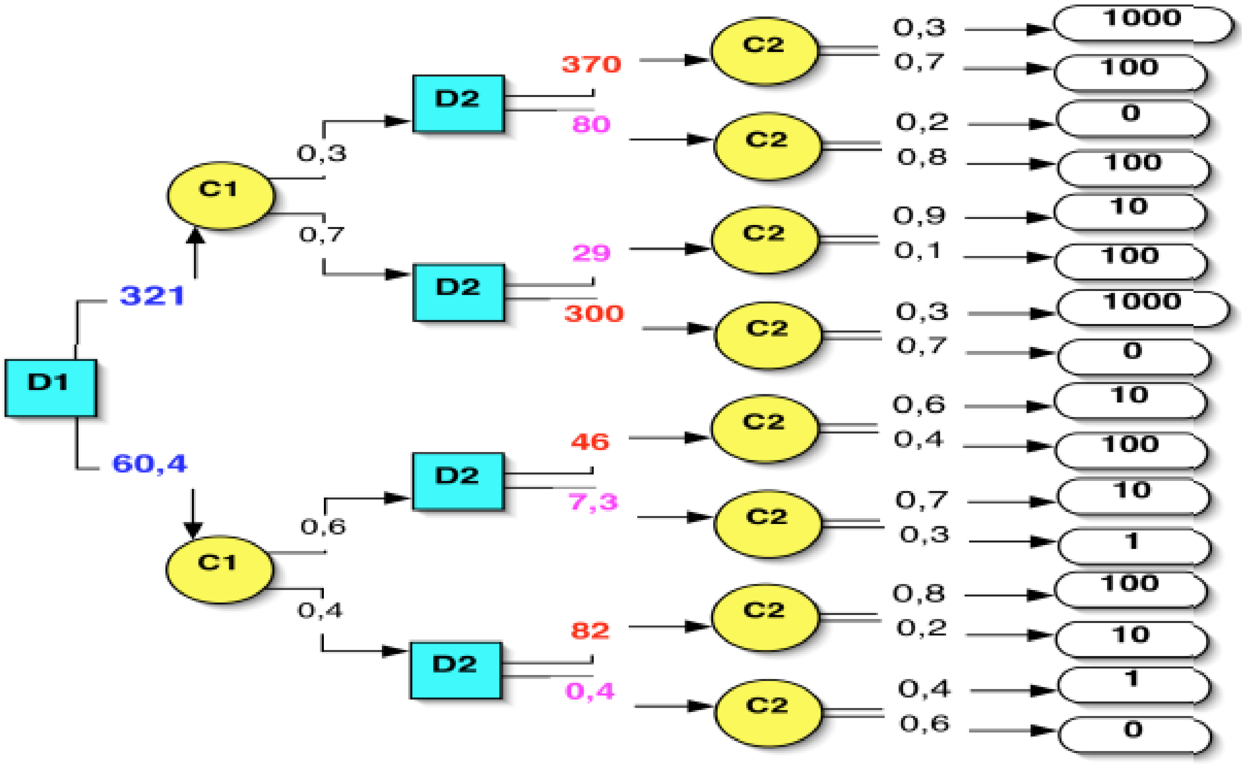




- Calcul : $E(C_2) = \sum_{C_2} P(C2 / D1, C1, D2) U(D1, C1, D2, C2)$
- Exemple : (0,3x1000)+(0,7x100) =370

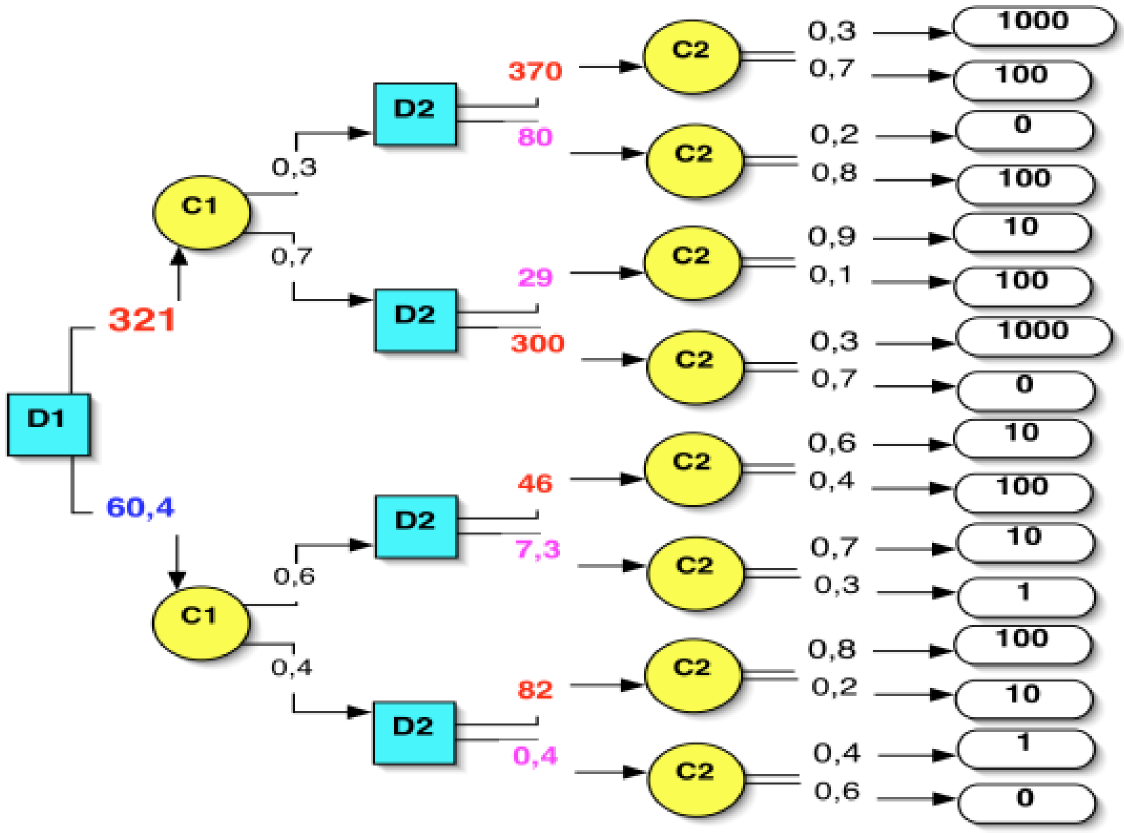


$$calcul : E(D_2) = \underset{D_2}{Max}\, E(C_2)$$



$$calcul : E(C_1) = \sum_{C_1} P(C_1 / D_1)\, E(D_2)$$

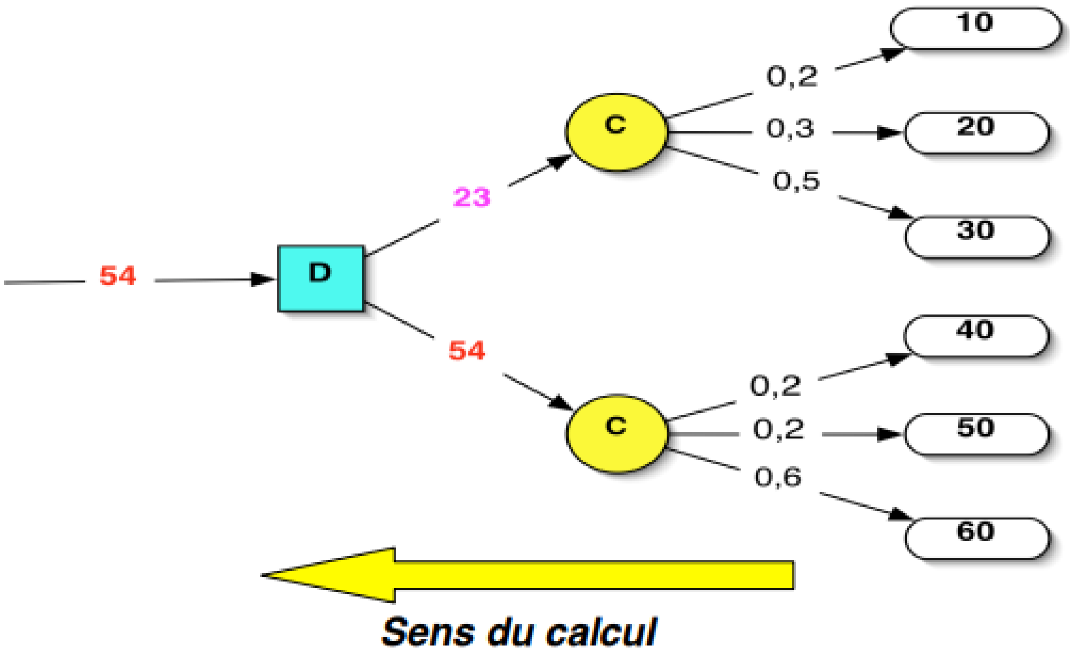
- Exemple : (370x0,3) + (300x0,7) = 321



$$calcul : E(D_1) = \underset{D_1}{Max}\, E(C_1)$$

Calcul dans un arbre de décision :

- Des **feuilles vers la racine**
- Si le nœud est un **nœud événement** (ou chance) : **on calcule une espérance**
- Si le nœud est un **nœud de décision** : on **conserve le maximum** Sens du calcul



3. Aversion pour le risque :

Le critère de Pascal, la maximisation de l'espérance mathématique (EU) peut poser problème du fait de l'aversion au risque des décideurs

Paradoxe de St. Petersbourg : note de D. Bernoulli (18 ième siècle) à l'Académie de Sciences de St Petersbourg.

Il imagine :

- Un **homme riche** et un **mendiant** qui dispose d'un billet de loterie dont le tirage peut procurer, soit **20000 ducats**, soit **rien**, avec des **probabilités** égales (0,5). L'espérance mathématique de gain est alors de **10000 ducats**.
- La proposition de rachat du billet par l'homme riche à **9000 ducats**, soit moins que sa valeur espérée, a **été acceptée par mendiant**.

Pourquoi ?

- L'explication de Bernouilli est que les 2 personnes **n'apprécient pas de la même manière l'utilité U des gains selon leur niveau de richesse (W).**
- Cette explication ne sera remise en compte que bien plus tard par Marshall pour donner lieu à la fonction **d'utilité de la richesse**.

La fonction U(W) est concave dont :

- La dérivée première est positive (non saturation)
- La dérivée seconde est négative (utilité marginale constamment décroissante)

Pour un **niveau de richesse W0** et une **fonction d'utilité supposée connue**, on considère une **loterie**, **définie par la variable aléatoire x** pouvant prendre les 2 valeurs $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$, avec la **probabilité de 0,5**.

- On calcule pour les 2 valeurs x_1 et x_2 les niveaux de richesse finale (W) et d'utilité (U(W)) :

$$W_1 = W_0 + x_1 \qquad U_1 = U\,(W_0 + x_1)$$
$$W_2 = W_0 + x_2 \qquad U_2 = U\,(W_0 + x_2)$$

- L'espérance de l'utilité de la richesse finale $E\,[U\,(W_0 + x)]$ diffère de l'utilité de la richesse finale $W_0 + E[x]$
- Cet écart $\boldsymbol{\Pi}$**(** $\mathbf{W_0}$**, x)** exprimé sur l'axe monétaire (W) est appelé **Equivalent Certain (EC)**
- EC désigne la quantité de revenu certain qui rendra le choix indifférent quand il faut choisir entre un résultat certain et un résultat incertain non aléatoire (par exemple le prix maximum qu'un joueur est prêt à payer pour un billet de loterie)

Quand un individu dont la richesse initiale est W_0 joue à la loterie (sur le graphique la variable aléatoire x avec 2 résultats équiprobables x_1 et x_2), son EC est la fonction inverse de l'espérance d'utilité de la richesse finale :

$$\mathbf{EC = U^{-1} \{E [U (W_0 + x)]\}}$$

On en déduit la **Prime de Risque maximale** qu'il serait prêt à payer pour obtenir l'espérance mathématique du résultat de la loterie plutôt que d'en subir les aléas :

$$\textbf{Prime} = \Pi (W_0, x) = W_0+E[x] - EC = W_0+E[x] - U^{-1} \{E [U (W_0 + x)]\}$$

Avec une **fonction d'utilité concave**, une telle **prime** est toujours **positive**, et elle traduit une **aversion au risque**, expliquant les diverses décisions des individus pour réduire leurs risques (assurance, couverture de position, diversification d'actifs, …)

Une **fonction d'utilité convexe** traduirait un **goût pour le risque** Cette fonction d'utilité dépend :

- D'éléments **objectifs** (fortune, importance de l'enjeu),
- D'éléments **subjectifs** (aversion ou goût pour le risque).

Avec la fonction d'utilité logarithmique propose par Bernouilli, $U = \ln(W)$, et $W = W_0 + x$ et $x_1 = 0$; $x_2 = 20$K€ et $p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5$, on a les primes de risque suivantes :

W_0	1 K€	10 K€	40 K€	100 K€
EC	4.5	17.3	49	110
Prime	6.4	2.6	1	0.5

On note :

- La prime de risque est d'autant **plus réduite** que la **richesse initiale est importante**
- Ainsi un individu ayant cette fonction d'utilité et disposant d'une richesse initiale de 1K" serait prêt à vendre une telle loterie jusqu'au prix limite de 3,5 K€ (EC - 1 = 4,5 – 1)
- Un individu de même fonction d'utilité et de richesse initiale de 100 K€, € serait prêt à vendre une telle loterie jusqu'au prix limite de 10 K€ (EC – 100 = 110 – 100). En revanche, il accepterait d'acheter cette loterie au-dessous de ce prix limite de 10 K€.
- Cela explique qu'une **grande entreprise puisse prendre des risques**, en termes d'investissements ou de croissance externe, compatibles avec ses fonds propres