Chapitre 1

0.1 Espace probabilisable

0.1.1 Exprérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire s'il est impossible d'en prévoir le résultat, ie si répétée dans les mêmes conditions, elle peut donner des résultats différents, mais nous pouvons décrire, avant le déroulement de l'expérience, l'ensemble de tous les résultats possibles.

Example 1 *Le lancement d'une pièce de monnaie.*

Example 2 *Le jet d'un dé.*

0.1.2 Ensemble fondamental d'une expérience aléatoire

L'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. L'ensemble fondamental est généralement dénoté par $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\}$. Un point quelconque ω_i de Ω est un résultat élémentaire.

L'ensemble fondamental de l'exemple 1 est $\Omega = \{F, P\}$.

L'ensemble fondamental de l'exemple 2 est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Example 3 *On lance deux dés et on s'intéresse aux points marqués sur chaque dé ;*

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6,6)\}.$$

Example 4 *On lance une pièce de monnaie autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir face ;* $\Omega = \{F, PF, PPF, ..., PP...PF, ...\}$.

0.1.3 Evénement aléatoire

- Le résultat d'une expérience, ie d'une combinaison de résultats possibles, constitue un événement. Mathématiquement un événement est un sous-ensemble A de l'ensemble fondamental Ω.

- Si le résultat d'une expérience est un élément de A, on dit que l'événement A a été réalisé.

- Un événement qui consiste en un seul point ω_i de Ω est appelé *événement élémentaire.*

Example 5 *On lance deux dés, alors* $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6,6)\}$. *Soient les événement* A, B *et* C ; $A =''$ *la somme des points est égale à six*$''$ *donc* $A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$. $B =''$ *la somme des points est inférieure à six*$''$ *donc* $B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$. $C =''$ *la somme des points est paire et inférieure à six*$''$ *donc* $C = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (4,1)\}$

Evénements particuliers Toute expérience aléatoire comprend un événement certain et un événement impossible. L'événement impossible est l'ensemble vide $\varnothing$. L'événement certain est l'ensemble fondamental Ω lui-même.

0.1.4 Opérations sur les événements

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste	Notation
Négation : événement contraire	Complémentaire	$\overline{A}$ ou A^c
Conjonction : A et B	Intersection	$A \cap B$
Disjonction : A ou B	Réunion	$A \cup B$
A mais pas B	Différence	$A - B$
A et B sont deux événements incompatibles	Parties disjointes	$A \cap B = \varnothing$
$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ est un système complet d'événements	Partition de Ω	$A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j, \cup_i A$
L'événement A implique l'événement B, $(A \Rightarrow B)$	Inclusion	$A \subset B$

Example 6 *Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à jeter un dé. Donc* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Soient A et $\overline{A}$ deux événements : $A =''$obtenir un nombre de points pair$''$ et $\overline{A} =''$ne pas obtenir un nombre de points pair$''$ alors* $A = \{2, 4, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$. *$B =''$obtenir un chiffre inférieur à six $''$ alors* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *$C =''$ obtenir un chiffre impair $''$ alors* $C = \{1, 3, 5\}$. *$D =''$obtenir un chiffre impair* ***et*** *inférieur à* $6''$ *donc* $D = B \cap C = \{1, 3, 5\}$. *$E =''$ obtenir un chiffre plus petit que* $3''$ *donc* $E = \{1, 2\}$. *$F =''$obtenir un multiple de* $3''$ *alors* $F = \{3, 6\}$. *$G =''$ obtenir un chiffre plus petit que* 3 ***ou*** *multiple de* $3''$ *alors* $G = E \cup F = \{1, 2, 3, 6\}$ *on remarque que les événements E et F sont incompatibles car* $E \cap F = \varnothing$.

Definition 7 (Tribu ou $\sigma-$algèbre) *Soit Ω un ensemble fondamental. Une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω est une tribu de parties de Ω si :*

- $\varnothing \in \mathcal{F}$,
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$,
- $A_n \in \mathcal{F}, \forall n \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Example 8 *Soit* $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. *La famille $P(\Omega)$ de toutes les parties de Ω est une tribu.*

Definition 9 *Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ constitué par l'ensemble Ω et une tribu $\mathcal{F}$ de parties de Ω s'appelle un* ***espace probabilisable****.*

0.2 Espace probabilisé

0.2.1 Axiomes du calcul des probabilités

Soient Ω un ensemble fondamental fini, $\mathcal{F}$ tribu de parties de Ω et P une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{F}$. On dit que P est une fonction de probabilité et que $P(A)$ est la probabilité de l'événement A si l'on a les axiomes suivants :

- Pour chaque événement $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(\Omega) = 1$,
- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont incompatibles(ie, $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$), la probabilité de leur union est égale à

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Definition 10 *Le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est appelé* ***espace probabilisé****.*

Propriétés $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé. A, B et $C \in \mathcal{F}$.

- $P(\varnothing) = 0$,
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$,
- si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

0.2.2 Espace probabilisé fini

Soit Ω un ensemble fondamental fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}$. Si à chaque point $\omega_i \in \Omega$ on attribue un nombre réel p_i qu'on appelle probabilité de ω_i, vérifiant les propriétés suivantes :

- chaque p_i est positif ou nul, $p_i \geq 0$,
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

on dit que l'on a un espace probabilisé fini.

On définit alors la probabilité $P(A)$ d'un événement quelconque A, comme étant la somme des probabilités des points de A.

Example 11 *Trois chevaux A, B et C participent à une course. A a deux fois plus de chances que B de gagner et B a deux fois plus de chances que C de gagner. Quelle est la probabilité pour que B ou C soit le vainqueur?*

$\Omega = \{A, B, C\}$

On détermine les probabilités des événements élémentaires ; soit $P(C) = p$ donc $P(B) = 2p$ et $P(A) = 2 \times 2p = 4p$ alors $p + 2p + 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{7}$, d'où

$P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{2}{7}$ et $P(C) = \frac{1}{7}$.

"B ou C soit le vainqueur"$=\{B, C\}$

$P(\{B, C\}) = P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.

0.2.3 Espace fini équiprobable

Un tel espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, où chaque élément de Ω a la même probabilité est appelé **espace équiprobable** ou **uniforme.** Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}$ donc $\forall i,\ P(\omega_i) = \frac{1}{n}$.

Si un événement A est formé de r points, sa probabilité est alors $\frac{r}{n}$. En d'autres termes

$$P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables\ \grave{a}\ la\ r\acute{e}alisation\ de A}{nombre\ de\ cas\ possibles\ de\ l'ensemble\ fondamental\ \Omega}.$$

Remark 12 *La formule précédente de $P(A)$ ne peut être utilisée que pour un espace équiprobable.*

Example 13 *On jette un dé. Trouver la probabilité d'obtenir 2 ou 5.*

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(1) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$.
Soit l'événement $A ='' \text{obtenir 2 ou 5 } '' = \{2, 5\}$
$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Example 14 *On choisit au hasard 2 articles d'un lot de 12 articles dont 4 sont défectueux. Soient les événements A et B : $A ='' \text{ les deux articles sont } d\acute{e}fectueux'', B ='' \text{ aucun des deux articles } n'est\ d\acute{e}fectueux''$. Cherchons $P(A)$ et $P(B)$.*

Ω est formé de toutes les combinaisons possibles de deux articles parmi 12, donc $card(\Omega) = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = 66$, ce qui donne le nombre de cas possibles.

A peut se réaliser de $C_4^2 = 6$ façons différentes, ce qui donne le nombre de cas favorables.

B peut se réaliser de $C_8^2 = 28$ façons différentes, ce qui donne le nombre de cas favorables.

Ainsi $P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$ et $P(B) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$.

0.3 Probabilité conditionnelle, indépendance

Quand les événements sont liés entre eux, l'information concernant un des événements peut modifier la probabilité des autres événements. On parle donc de probabilités conditionnelles.

Definition 15
- *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, A et B deux événements t.q $P(B) \neq 0$. La connaissance de la réalisation de B modifie la probabilité de réalisation d'un événement élémentaire, puisque l'ensemble des résultats possibles est devenu B et non plus Ω. La probabilité de A sachant que B s'est déjà réalisé ou bien probabilité de A conditionnée par B est donnée par :*

  $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

  On peut écrire $P(A \cap B) = P(B) P(A \mid B)$, ou bien $P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A)$ si$P(A) \neq 0$.

- ***Cas particulier** : si Ω est un espace équiprobable fini donc $P(A\cap B)=\frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)}$; $P(B)=\frac{card(B)}{P(\Omega)}$; donc $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{card(A\cap B)}{card(B)}$.*

Example 16 *On jette une paire de dés bien équilibrés. Sachant que la somme est égale à 6, calculer la probabilité pour que l'un des dés ait donné un 2. $\Omega=\{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,6)\}$. Soit l'événement $A=''$ l'un des dés a donné $2''$. Donc $A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$. Soit l'événement $B=''$ la somme des points est égale à $6''$. Donc $B=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$. Alors $A\cap B=\{(2,4),(4,2)\}$ donc $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{5}$.*

Remarquons que $P(A)=\frac{11}{36}$.

0.3.1 Principe des probabilités composées

Le principe des probabilités composées découle des axiomes et des définitions :
il s'écrit $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$.
Pour trois événements A, B et C :
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid A\cap B)$.
Ce principe peut se généraliser :
pour des événements quelconques $A_1,A_2,...,A_n$

$$P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)...P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1}).$$

Example 17 *Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard trois articles du lot, l'un après l'autre. Calculer la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux.*

Soient les événements A_1,A_2 et A_3;
$A_1=''\,le\ premier\ article\ n'est\ pas\ défectueux''$
$A_2=''\,le\ \sec onde\ article\ n'est\ pas\ défectueux''$
$A_3=''\,le\ troisième\ article\ n'est\ pas\ défectueux''$
Donc l'événement $A=''\,les\ trois\ articles\ ne\ soient\ pas\ défectueux''$ d'où $A=A_1\cap A_2\cap A_3$.
Alors $P(A)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{14}{55}$.
Le principe des probabilités composées est également appelé **principe de la multiplication**.

0.3.2 Indépendance

L'événement A est indépendant de l'événement B si la probabilité de l'événement A n'est pas modifiée par une information concernant la réalisation de l'événement B, ie

$$P(A\mid B)=P(A).$$

Le principe des probabilités composées entraîne :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=P(A)P(B).$$

Alors deux événements A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) P(B)$, dans le cas contraire on dit qu'ils sont dépendants.

Example 18 *On lance un dé bien équilibré,* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Soient les événements* A *et* B *:*

- $A =''$ *obtenir un nombre* $\inf$ *érieur à* $5'' = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $B =''$ *obtenir un nombre pair* $'' = \{2, 4, 6\}$.
- $A \cap B =''$ *obtenir un nombre pair et* $\inf$ *érieur à* $5'' = \{2, 4\}$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A)\ P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Donc $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ ie A et B sont indépendants.

Example 19 *La probabilité pour que A atteigne une cible est* $\frac{1}{4}$ *et la probabilité pour que B atteigne cette même cible est* $\frac{2}{5}$. *Quelle est la probabilité pour que la cible soit atteinte sachant que A et B tirent chacun sur la cible?*

Par hypothèse, $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{2}{5}$. On cherche $P(A \cup B)$. D'autre part la probabilité pour que A ou B atteigne la cible n'est pas influencée par ce que l'un ou l'autre réussit ; cela veut dire que l'événement " A atteigne la cible" est indépendant de l'événement "B atteigne la cible"

Donc $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$, et finalement

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{20}.$$

0.4 Théorème de Bayes, probabilité des causes

Supposons que les événements $C_1, C_2, ..., C_n$ forment une partition de Ω (ie $C_1, C_2, ..., C_n$ système complet d'événements ie $\forall i \neq j$, $C_i \cap C_j = \varnothing$ et $\cup_i C_i = \Omega$).

Soit A un autre événement quelconque. Alors,

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = \Omega \cap A = (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n) \cap A \\ &= (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A) \cup ... \cup (C_n \cap A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C_1 \cap A) + P(C_2 \cap A) + ... + P(C_n \cap A) \qquad (1) \\ &= P(C_1) P(A \mid C_1) + P(C_2) P(A \mid C_2) + ... + P(C_n) P(A \mid C_n). \end{aligned}$$

Pour un $k \in \{1, 2, ..., n\}$ donné, la probabilité conditionnelle de C_k sachant A est définie par

$$P(C_k \mid A) = \frac{P(C_k \cap A)}{P(A)}.$$

Dans cette équation on remplace $P(A)$ par (1) et $P(C_k \cap A)$ par $P(C_k) P(A \mid C_k)$ ce qui donne :

Theorem 20 (Bayes) *Soient $C_1, C_2, ..., C_n$ une partition de Ω et A un événement quelconque. Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$ on a alors,*

$$P(C_k \mid A) = \frac{P(C_k) P(A \mid C_k)}{P(C_1) P(A \mid C_1) + P(C_2) P(A \mid C_2) + ... + P(C_n) P(A \mid C_n)} = \frac{P(C_k) P(A \mid C_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i) P(A \mid C_i)}.$$

Example 21 *Trois machines A,B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont 3%, 4% et 5%.*

- Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse?
- Supposons que l'on prenne une pièce au hasard et que celle-ci soit défectueuse. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine A?

$\Omega = \{l'ensemble\ de\ toutes\ les\ pièces\}$
X="la pièce tirée est défectueuse"
A="la pièce tirée est fabriquée par A"
B="la pièce tirée est fabriquée par B"
C="la pièce tirée est fabriquée par C"
$P(X) = P(\Omega \cap X) = P((A \cup B \cup C) \cap X) = P((A \cap X) \cup (B \cap X) \cup (C \cap X)) = P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X)$
$= P(A) P(X \mid A) + P(B) P(X \mid B) + P(C) P(X \mid C) = 0.5 \times 0.03 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.05 = 0.037$
$P(A \mid X) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(X)} = \frac{0.5 \times 0.03}{O.O37} = \frac{15}{37}$.