

# **CHAPITER 02**

## **Eléments de théorie de la décision**

# I. Introduction à la Théorie de la Décision :

## 1. La théorie de la décision :

1. La théorie de la décision est une théorie sur les décisions
2. Le sujet n'est pas unifié : plusieurs façons différentes de théoriser sur les décisions, qui ont conduit à différentes directions de recherche
3. Presque tout ce que fait un être humain comporte des décisions :
  - ✓ théoriser au sujet des décisions est presque identique à théoriser des activités humaines.
  - ✓ la théorie de décision se concentre seulement sur quelques aspects de l'activité humaine
4. Dans les situations traitées par des théoriciens de décision, il y a des options à choisir entre elles, ces choix sont des activités dirigées par but.

## 2. Un sujet interdisciplinaire :

1. La théorie moderne de décision s'est développée depuis le milieu des 20<sup>ème</sup> siècles par des contributions de plusieurs disciplines académiques
2. Bien que ce soit maintenant clairement un sujet académique à part entière, la théorie de décision est typiquement poursuivie par les chercheurs qui s'identifient comme économistes, statisticiens, psychologues, sociologues, politiciens et/ou philosophes.
3. il y a une certaine division de travail entre ces disciplines :
  - ✓ Un politique peut s'intéresser aux règles de vote et d'autres aspects de prise de décision collective
  - ✓ Un psychologue peut s'intéresser aux comportements des individus dans les décisions
  - ✓ Un philosophe peut s'intéresser aux conditions de la rationalité dans les décisions.
4. Mais il y a un grand chevauchement, et le sujet s'est fortement enrichi des différentes méthodes que les chercheurs des différentes disciplines ont définies.

## 3. Théories normatives et descriptives de la décision :

### a. Théorie normative de la décision :

a. *théorie au sujet de la façon dont des **décisions devraient être prises***

### b. Théorie descriptive de la décision :

b. *théorie traitant de la façon dont des **décisions sont prises réellement.***

- Ces théories concernent essentiellement la prise de décision **rationnelle**
- On s'intéresse ici plus essentiellement aux **théories normatives de la décision**

#### 4. Théories normatives et normes :

Les théories normatives concernent la prise de décision **rationnelle : normes de la rationalité**.

- Il existe **d'autres normes** (que celles de la rationalité) : **normes morales, politiques, ...**, mais elles sont considérées comme externes à la théorie de décision qui les suppose déjà établies
- **Les normes de la rationalité concernent :**
  - ✓ principalement la façon d'agir quand il y a **incertitude, risque et manque d'information**.
  - ✓ la façon dont **un individu** peut **coordonner ses décisions dans le temps**.
  - ✓ la façon dont **plusieurs individus** peuvent **coordonner leurs décisions**.
  - ✓ dans les procédures de décision sociales.

## II. Décider et évaluer :

- Quand nous prenons des décisions, nous essayons, tant que possible, de prendre de bonnes décisions, ceci selon un standard de ce qui est bon ou mauvais
- Le choix d'une valeur-standard pour la prise de décision (et pendant la vie) est le sujet de la philosophie morale
- La théorie de décision suppose qu'une telle norme est acquise, et procède pour exprimer cette norme de manière précise et utile.

### 1. Relations et nombres :

Considérons un exemple simple :

- Alice désire acheter un potage de tomate
- Elle doit choisir entre diverses marques (A, B, C) de potage de tomate
- Sa norme de valeur peut être liée au prix, au goût ou à leur combinaison
- Supposons que : Alice aime le potage A plus que le potage B ou le potage C, et le potage B plus que le potage C

**Alors Alice devrait clairement choisir le potage A**

Dans ce simple exemple, on n'a pas besoin d'un modèle plus formel, cependant 2 modèles formels utiles sont possibles :

- Modèle des relations
- Modèles des nombres

#### Modèle des relations :

Représentation en termes de relations du modèle de valeur

On définit une relation entre les 3 potages : la relation « meilleure que » :

- A est meilleur que B
- B est meilleur que C
- A est meilleur que C

Clairement, puisque A est meilleur que toutes les autres alternatives, A devrait être choisi.

### Modèle des nombres :

Représentation en termes de nombres du modèle de valeur.

On assigne des valeurs numériques à chacun des 3 choix possibles, par exemple :

- A a la valeur 15
- B a la valeur 13
- C a la valeur 7

Puisque A a une valeur plus élevée que B ou C, alors A devrait être choisi.

## 2. Termes de comparaisons de valeurs :

Afin de comparer des alternatives, on emploie des termes tels que :

- meilleur que ...,
- plus mauvais que ...,
- également bon que ...,
- au moins aussi bon que ...
- ! ...

Ce sont des relations binaires (2 arguments)

### Notation mathématique :

**A > B** pour « A est meilleur que B » ( $A > B$  signifie que B est plus mauvais que A comme A est meilleur que B)

**A = B** pour A et B sont « également bons »

**A ≥ B** pour A est « au moins aussi bon que » B

## 3. Logique des préférences :

Les 3 notions comparatives sont les bases de la logique de préférence :

- « Meilleures que » ( $>$ ) :  $>$  représente la préférence ou la préférence forte
- « Égale en valeur » ( $=$ ) :  $=$  représente l'indifférence
- « (Au moins aussi bon que) » ( $\geq$ ) :  $\geq$  représente la préférence faible

Ces 3 notions sont liées ensemble selon les 2 règles suivantes :

Règle 1 : A est meilleur que B si et seulement si (ssi) A est au moins aussi bon que B, mais B n'est pas au moins aussi bon que A, soit :

$$A > B \text{ si et seulement si } A \geq B \text{ et non } B \geq A$$

Règle 2 : A est également bon que B ssi A est au moins aussi bon que B et B est au moins aussi bon que A, soit :

$$A = B \text{ si et seulement si } A \geq B \text{ et } B \geq A$$

Exemple d'application de la règle 1 :

- ma voiture est meilleure que votre voiture
- ma voiture est au moins aussi bonne que votre voiture, mais votre voiture n'est pas au moins aussi bonne que la mienne.

Ces 2 expressions ont la même signification.

#### 4. Usage des préférences dans la prise de décision :

En prise de décision, des relations de préférence sont utilisées pour trouver la meilleure alternative

**Pour cela on utilise la règle :**

Règle 1 : une alternative est meilleure ssi elle est meilleure que toutes les autres alternatives : s'il y a une seule alternative qui est la meilleure, alors la choisir

Il y a des cas dans lesquels aucune alternative n'est uniquement la meilleure, puisque la position la plus élevée est partagée par 2 ou plusieurs alternatives

Exemple :

- Le potage A et le potage B sont également bons ( $A = B$ )
- Le potage A est meilleur que le potage C ( $A > C$ )
- Le potage B est meilleur que le potage C ( $B > C$ )

Dans ce cas, la solution évidente est de sélectionner A ou B.

**Plus généralement, la règle suivante est utilisée :**

Règle 2 : une alternative est (parmi) les meilleures ssi elle est au moins aussi bonne que toutes les autres alternatives : s'il y a des alternatives qui sont meilleures, sélectionner l'une d'entre elles.

Mais il y a des cas dans lesquels même cette règle modifiée ne peut pas être utilisée pour décider

Notons que les préférences qui violent des critères de rationalité, tels que la transitivité, sont rarement utiles pour guider des décisions.

## 5. Utilisation de représentation numérique : notion d'Utilité :

L'utilisation de nombres pour représenter les valeurs des alternatives :

- Fournit en générale une représentation rationnelle
- La relation de préférence faible ( $\geq$ ) est alors toujours **complète**,
- Les relations de préférences faible ( $\geq$ ) et strictes ( $>$ ), et d'indifférence ( $=$ ) sont toutes **transitives**
- Toutes ces valeurs peuvent être réduites à une seule entité, nommée « **utilité** »  $U(x)$

Exemple : soit une évaluation des travaux de quelques philosophes modernes :

- Bertrand Russell: 50
- Karl Popper: 35
- Willard Van Orman Quine: 35
- Jean Paul Sartre : 20
- Martin Heidegger : 1

→ On en déduit que Russell est préféré aux autres philosophes

- Notons cependant, que dans de nombreux cas, la représentation par des ombres n'est pas claire : pas de mesure pour « meilleur en tant que philosophe », l'attribution de nombres peut alors paraître arbitraire ...

## 6. Utilisation des utilités dans la prise de décision :

Il est facile d'utiliser des valeurs représentées numériquement (utilités) dans la prise de décision.

**La règle de décision de base est alors simple et évidente :**

**Règle 1 : choisir l'alternative avec l'utilité la plus élevée**

Exemple : valeurs assignées par un électeur à 3 candidats politiques :

- Mme. Anderson : 15
- M. Brown : 15
- M. Carpenter : 5

Cette règle ne peut être ici utilisée car il y a plusieurs alternatives avec la valeur maximale, elle doit être alors être complétée :

**Règle 2 : choisir l'alternative avec l'utilité la plus élevée ; Si plus d'une alternative a l'utilité la plus élevée, sélectionner l'une d'entre elles (n'importe comment)**

**C'est une règle de « maximisation » :**

- La théorie économique est basée sur l'idée que les individus maximisent leurs biens, comme mesurés en argent
- La théorie morale utilitaire postule que les individus doivent maximiser l'utilité résultant de leurs actions.
- Dans la théorie de décision, la maximisation d'utilité est aussi largement adoptée

### **III. Représentation standard des décisions individuelles :**

En théorie de la décision individuelle :

- La représentation standard d'un problème de décision est **la matrice de décision**
- Une autre représentation d'un problème de décision est **l'arbre de décision**
- Pour utiliser ces représentations, 03 **concepts de base** de la théorie de la décision doivent être définis :
  - Les **alternatives**
  - Les **résultats**
  - **L'état de nature** (événement, chance, ...)

#### **➤ Ensemble d'alternatives :**

Dans une décision, on a à choisir entre différentes **alternatives** (options, actions, ...)

Dans certains problèmes de décision, **l'ensemble d'alternatives** peut être :

**Ouvert** : de nouvelles alternatives peuvent être inventées ou découvertes par le décideur

**Exemple** : ma décision de comment passer la soirée ; j'ai en tête un ensemble d'alternatives, mais il est possible je découvre une alternative à laquelle je n'ai pas pensé

**Fermé** : aucune nouvelle alternative ne peut être ajoutée

**Exemple** : ma décision de comment voter dans les prochaines élections : il y a un nombre limité d'alternatives (des candidats ou des parties), entre lesquelles je dois choisir

**2 types de fermetures d'ensemble d'alternatives :**

- Fermeture volontaire : le décideur lui-même a décidé de fermer l'ensemble dans la première étape de la décision

**Exemple** : pour ma soirée, je peux commencer en décidant que seulement 2 alternatives valent la peine d'être considérées, rester à la maison ou aller au cinéma.

- Fermeture involontaire : la fermeture a été imposée par d'autres ou par des circonstances impersonnelles.

**Dans la vie réelle** : les ensembles d'alternatives **ouverts** sont très fréquents

**Dans la théorie de la décision** :

- En général les ensembles d'alternatives sont **fermés** car :
  - La fermeture permet une résolution théorique des problèmes de décision plus facile
  - Si l'ensemble d'alternatives est ouvert, une solution définitive au problème de décision n'est pas en général possible
- On suppose généralement que les **alternatives sont mutuellement exclusives**, c.a.d., il n'existe pas 2 d'entre elles qui soient simultanément réalisables.

### ➤ **Etats de nature :**

**L'effet d'une décision dépend :**

- De notre **choix d'une alternative** et comment nous l'exécutons
- De **facteurs** en dehors du contrôle du décideur (exogènes)

**Certains de ces facteurs exogènes sont connus** : ils constituent **l'information** dont le décideur dispose.

**D'autres sont inconnus** : ils dépendent de ce que d'autres personnes feront et sur les éléments de la nature qui sont inconnus au décideur.

*Exemple : considérons la décision d'aller ou de ne pas aller à un concert en plein air.*

*Les résultats (que je dois satisfaire ou pas) dépendront des facteurs naturels (le temps) et du comportement d'autres êtres humains*

**Dans la théorie de décision**, on regroupe les divers facteurs superflus inconnus dans un certain nombre de **cas**, appelés « **les états de nature** »

### ➤ **Etats de nature et résultats :**

#### ✓ **Etat de nature :**

*Exemple :*

- *Considérons la décision de porter ou de ne pas apporter un parapluie quand je sors demain : L'effet de cette décision dépend de s'il pleuvra demain*

Les 2 cas « il pleut » et « il ne pleut pas » peuvent être pris comme « **états de nature** » dans un traitement de cette décision dans la théorie de décision.

## ✓ Résultats :

Les « **résultats possibles** » d'une décision sont définis comme effets combinés d'une alternative choisie et de l'état de la nature :

- *Par conséquent, si je ne prends pas mon parapluie et il pleut, alors le résultat est que j'ai une valise légère et je suis mouillé.*
- *Si je prends mon parapluie et il pleut, alors les résultats sont que j'ai une valise plus lourde et je ne suis pas mouillé,*
- ...

## ➤ Matrices de décision :

C'est le format standard pour la routine d'évaluation-choix dans la théorie de la décision (Individuelle)

Dans une matrice de décision :

- Les **alternatives** sont tabulées contre les **états possibles de la nature**
- Les alternatives sont représentées par les **lignes** de la matrice
- Les états de nature par les **colonnes**

Soit une décision d'apporter ou non un parapluie :

	Il pleut	Il ne pleut pas
Parapluie	Vêtements secs, valise lourde	Vêtements secs, valise lourde
Pas de parapluie	Vêtements trempés, valise légère	Vêtements secs, valise légère

- Pour chaque alternative et état de nature, on assigne dans la matrice assigne un **résultat** (tel que « vêtements secs, la valise lourde »).

Pour utiliser une matrice de décision, il faut en plus de :

- **L'information sur la façon dont les résultats sont évalués**
- **L'information sur les états de nature qui seront réalisés.**

## ➤ Matrices de décision d'utilités :

- Pour représenter les valeurs des résultats, on leur assigne en général des utilités
- Des descriptions verbales des résultats peuvent alors être remplacées par des valeurs d'utilité dans la matrice :

	Il pleut	Il ne pleut pas
Parapluie	15	15
Pas de parapluie	0	18

- La théorie de la décision concerne principalement des problèmes qui peuvent être exprimés en matrices de ce type, « **matrices d'utilité** »
- La plupart des méthodes de la théorie de décision exigent **une information numérique**.

### ➤ Informations sur des états de nature : certitude et incertitude

Dans la théorie de décision, des matrices sont combinées avec divers types d'informations sur des états de nature :

- Le décideur peut connaître quel état de nature est obtenu :

Si, dans l'exemple ci-dessus, si je sais qu'il pleuvra, alors je peux prendre ma décision de façon très simplement

- Les cas comme celui-ci, quand un **seul état de nature** doit être pris en considération, s'appellent la « **prise de décision sous certitude** »
- Si on sait, pour chaque alternative, ce que seront les résultats si on choisit cette alternative, alors on agit aussi en **certitude** ;
- Sinon, on agit en **incertitude**.
- **L'incertitude** est habituellement divisée en catégories telles que : le **risque**, **l'incertitude**, **l'ignorance**

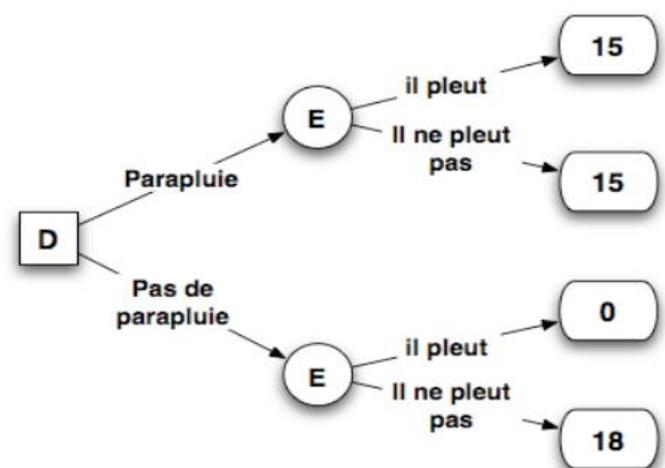
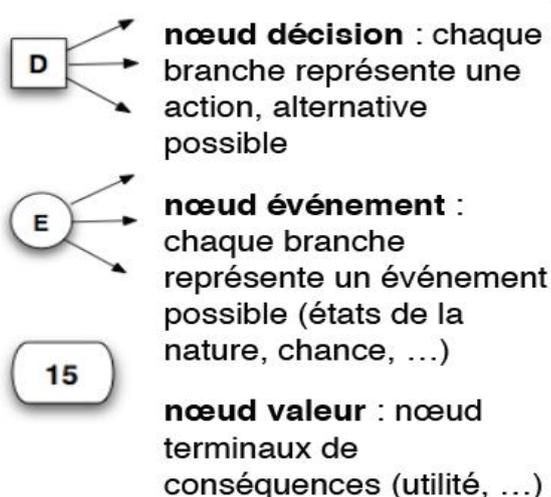
### ➤ Arbres de décision

C'est une autre représentation traditionnelle de la décision

Soit la matrice de décision d'utilités suivante :

	Il pleut	Il ne pleut pas
Parapluie	15	15
Pas de parapluie	0	18

On peut lui associer l'arbre de décision suivant :



## IV. Probabilités et Utilité Espérée

### 1) Rappel sur les probabilités pour la décision :

- Pour raisonner sur un problème de décision particulier, souvent l'**environnement** (appelé aussi « **nature** ») doit être considéré :

*Ex : l'état du ciel demain matin si votre problème consiste à savoir si vous allez organiser une réception dans votre jardin ou dans votre salon)*

- Cette nature peut prendre différentes formes, ce sont les divers « états de la nature », ici : *ciel dégagé, nuageux, pluvieux,*
- **On cherche à « probabiliser » ces états de la nature.**

En langage mathématique on se donne :

- Un ensemble  $S$  « d'événements élémentaires » que l'on supposera ici fini par commodité.

*Ex : A un jet de dés on associera un ensemble  $S$  composé des événements élémentaires : le dé tombe sur la face faisant apparaître 1, 2, 3, 4, 5, 6.*

- Un ensemble  $\mathcal{S}$  « d'événements » construit sur la base de  $S$  permettant de parler de la réunion, de l'intersection ... d'événements élémentaires.

*Ex : « Le dé tombe sur une face paire » est un événement composé de la réunion de 3 événements élémentaires.*

### 2) Les probabilités pour la décision :

On souhaite, que  $S$  possède un certain nombre de « bonnes propriétés », notamment :

$$S \in \mathcal{S} ;$$

$$A \in \mathcal{S} \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{S};$$

$$A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}.$$

On appelle « mesure de probabilité » (ou plus simplement probabilité) toute fonction :

$$P : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Vérifiant pour tout  $A, B \in \mathcal{S}$  :

$$1. P(A) \geq 0$$

$$2. P(S) = 1$$

$$3. A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Rappelons que ces 3 conditions impliquent que  $P(A)$  est toujours comprise entre 0 et 1

**Probabilité conditionnelle** : la probabilité de « A sachant B », notée  $P(A/B)$  est définie par :

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) \quad (1)$$

De tout cela on tire facilement la formule des probabilités totales (ou formule d'expansion) :

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forme une partition de S alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/A_i) \cdot P(A_i)$$

(Partition d'un ensemble = ensemble d'ensembles non vides et disjoints dont la réunion redonne l'ensemble de départ)

Il découle de (1) :

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B \cap A) = P(B/A) \cdot P(A)$$

D'où la formule bien connue du **théorème de Bayes** :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

En combinant cette dernière expression avec la formule des probabilités totales on obtient le célèbre Théorème de Bayes :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$$

Ce théorème permet de réviser ses croyances concernant l'occurrence de l'événement A en fonction d'une nouvelle information B

On appelle généralement :

- $P(A)$  une probabilité a priori
- $P(A/B)$  une probabilité a posteriori.

➤ **Application :**

Vous souhaitez lancer un nouveau produit. A priori vous pensez  $P(\text{marché favorable}) = 0,6$

Afin d'obtenir plus d'information vous avez commandé une étude de marché à un cabinet de conseil que vous connaissez bien. Votre expérience passée avec ce cabinet vous permet d'affirmer que les résultats de ses enquêtes sont fiables à 80%, c'est à dire que :

- $P(\text{étude favorable/marché favorable}) = P(\text{EF/MF}) = 0,8$
- $P(\text{étude défavorable/marché défavorable}) = P(\text{ED/MD}) = 0,8$

Vous recevez le rapport d'étude où l'on vous indique que le marché sera « favorable » à votre produit. Sachant cette nouvelle information, vous révisez vos croyances.

Ce qui nous intéresse c'est  $P(\text{marché favorable/étude favorable})$  soit  $P(\text{MF/EF})$ . Nous ne l'avons pas, mais nous pouvons la calculer simplement. En effet, les événements (marché favorable) et (marché défavorable) forment une partition de l'ensemble des événements. On peut alors appliquer le **théorème de Bayes** et poser :

$$P(\text{MF/EF}) = P(\text{EF/MF}) \cdot P(\text{MF}) / [P(\text{EF/MF}) \cdot P(\text{MF}) + P(\text{EF/MD}) \cdot P(\text{MD})]$$

$$P(\text{MF/EF}) = 0,8 \times 0,6 / (0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4) = 6/7 = 0,85$$

On peut aussi calculer  $P(\text{EF})$  qui est égale au dénominateur de l'expression précédente, soit :

$$P(\text{EF}) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4 = 0,56.$$

### 3) Utilité Espérée (UE) :

L'approche dominant la prise de décision sous le risque est celle de « l'utilité espérée - UE » (Expected Utility - EU).

- C'est le paradigme principal dans les théories de la décision tant descriptives que normatives
- L'utilité espérée pourrait s'appeler « la théorie d'utilité de probabilité pondérée »

Dans la théorie de l'utilité espérée :

- À chaque alternative est assignée une moyenne pondérée de ses valeurs d'utilité sous différents états de nature, et
- Les probabilités de ces états sont utilisées comme poids.

Dans l'exemple du parapluie, les utilités sont :

	Il pleut	Il ne peut pas
Parapluie	15	15
Pas de parapluie	0	18

Supposons que la probabilité de la pluie est 0,1, alors :

- l'utilité espérée (probabilité pondérée) d'apporter le parapluie est :

$$0.1 \times 15 + 0.9 \times 15 = 15$$

- l'utilité espérée (probabilité pondérée) de ne pas apporter le parapluie est :

$$0.1 \times 0 + 0.9 \times 18 = 16,2$$

Si nous maximisons l'utilité prévue nous ne devrions pas apporter le parapluie

Supposons que la probabilité de la pluie est 0,5, alors :

- L'utilité espérée d'apporter le parapluie est :

$$0.5 \times 15 + 0.5 \times 15 = 15$$

- L'utilité espérée de ne pas apporter le parapluie est :

$$0.5 \times 0 + 0.5 \times 18 = 9$$

Si nous voulons maximiser l'utilité prévue, alors nous devons apporter le parapluie.

En généralisant :

Supposons qu'il y ait n résultats :

- Chacun est associé à une utilité et à une probabilité
- Les résultats sont numérotés, de sorte que les premiers résultats aient une utilité  $u_1$  et une probabilité  $p_1$ , le second a une utilité  $u_2$  et une probabilité  $p_2$ , etc

Alors l'utilité espérée (UE) est définie ainsi :

$$UE = p_1 \times u_1 + p_2 \times u_2 + \dots p_n \times u_n$$

## V. Introduction à l'Analyse de la Décision

### 1) De la Théorie de la Décision à l'Analyse de la Décision :

Source Wikipédia :

- Most of decision theory is **normative** or **prescriptive**, i.e. it is concerned with identifying the best decision to take, assuming an ideal decision maker who is fully informed, able to compute with perfect accuracy, and fully rational.
- **The practical application of this prescriptive approach** (how people should make decisions) is called **Decision Analysis**, and aimed at finding tools, methodologies and software to help people make better decisions. The most systematic and comprehensive software tools developed in this way are called **decision support systems**.

## Decision Analysis:

- is the discipline comprising the **philosophy, theory, methodology**, and **professional practice** necessary to address important decisions in a formal manner.
- includes many **procedures, methods, and tools** for identifying, clearly representing, and
- formally evaluates the important aspects of a decision situation, for **prescribing the recommended course of action** by applying the maximum expected utility action axiom to a well-formed representation of the decision,
- translating the formal representation of a decision and its corresponding recommendation into insight for the decision maker and other stakeholders.

## 2) Caractéristiques des décisions en Analyse de la Décision :

Plusieurs caractéristiques peuvent être définies pour les décisions :

- **Caractère plus ou moins sûr des états futurs de la nature :**
  - **Etat certain**
  - **Etat incertain mesurable** (probabilité objective ou subjective déterminées) : on parle de **décision dans le risque**
  - **Etat incertain non mesurable ou radicale** (pas de probabilités définies) : on parle **de décision dans l'incertain**
- **Caractère unique ou répété de la décision :** dans les **décisions répétées** l'information sur l'état de la nature augmente, souvent par apprentissage et les probabilités des états sont en général révisées selon des approches bayésiennes
- **Caractère séquentiel ou non de la décision :** dans les **décisions séquentielles** le décideur intervient à différentes étapes, interaction entre décisions, information croissante
- **Caractère exogène et endogène de la décision :** quand l'environnement est endogène, le décideur peut **modifier les états**, il ne le peut pas quand il est exogène
- **Caractère partagé ou non de la décision :** **décision collective** (fonction d'utilité commune agrégeant les préférences individuelles des individus, ...)
- **Caractère conflictuel ou non de la décision :** jeux contre la nature (pas de conflit) et **jeux véritables entre joueurs différents** (théorie des jeux)