Université Batna 2
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département d'Informatique

Méthodes Numériques

Oussama HARKATI

Cours, 2`eme année licence Informatique

2023-2024

Contenu de la matière

Chapitre 1

Analyse matricielle

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Les structures algébriques

1.1.1.1 Les lois de compositions internes

Définition 1.1: Soit E un ensemble non vide.

Une loi interne $*$ (opération interne) est une application qui associe pour tout couple $(a, b) \in E \times E$ un élément $c \in E$ tel que $a * b = c$

Exemple 1.1

Soit la loi $\triangle$ définit sur $\mathbb{Q}$ par $(a, b) \longmapsto a \triangle b = \frac{a+b}{2}$

$\triangle$ est une loi interne car : $\forall\ a, b\ \in\ \mathbb{Q}$ alors $\frac{a+b}{2}\ \in \mathbb{Q}$

Exemple 1.2

Soit la loi $*$ définit sur $\mathbb{N}$ par $(a, b) \longmapsto a * b = a - b$

$*$ n'est pas une loi interne car : $(2; 5)$ n'admet pas d'image car $2 - 5 = -3 \notin\ \mathbb{N}$

1.1.1.1.1 Propriétés des opérations internes

Soit $*$ une loi interne et $a,\ \ a',\ \ b,\ \ c$ et e des éléments de E

1. Si $\forall\ a, b\ \ \in E\ : a * b = b * a$ on dit que $*$ est commutative.
2. Si $\forall\ a, b, c\ \ \in E\ : (a * b) * c = a * (b * c)$ on dit que $*$ est associative.
3. La loi $*$ admet sur l'ensemble E un élément neutre e si $\ \forall\ a \in E\ : a * e = e * a$.
4. On dit que $a \in E$ admet un élément symétrique a' si $a * a' = a' * a = e$.

Remarques 1.1

1. L'élément neutre est unique.
2. L'élément symétrique est aussi unique.

Exemple 1.3

Soit la loi interne $*$ définit sur $\mathbb{Z}$ par $(a,b) \longmapsto a * b = a + b - 2$.

1. La loi $*$ est commutative car $\forall\, a,b \in \mathbb{Z} : a + b - 2 = b + a - 2 \Rightarrow a * b = b * a$.
2. La loi $*$ est associative car $\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{Z} : (a * b) * c = (a + b - 2) + c - 2 = a + (b + c - 2) - 2 = a * (b * c)$.
3. La loi $*$ admet sur $\mathbb{Z}$ un élément neutre $e = 2$ car $a * e = e * a = a$.
4. On a $a * a' = e \Rightarrow a + a' - 2 = 2 \Rightarrow a' = 4 - a$ donc $\forall\, a \in \mathbb{Z}\ \exists\, a' \in \mathbb{Z} : a * a' = a' * a = e$

Exercice d'application 1.1

Soit la loi interne $\triangle$ définit sur $\mathbb{Q}$ par $(a,b) \longmapsto a \triangle b = \frac{a+b}{2}$
Vérifier les propriétés de cette loi.

1.1.1.1.2 Distribution des lois internes

Définition 1.2 : Soit $*$ et $\blacksquare$ deux lois internes sur E
On dit que la loi interne $*$ est distributive à gauche (respectivement à droite) par rapport à la loi $\blacksquare$ si $\forall\, a,b,c \in E : a * (b \blacksquare c) = (a * b) \blacksquare (a * c)$ respectivement $(a \blacksquare b) * c = (a * c) \blacksquare (b * c)$.
On dit que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\blacksquare$ si elle est distributive à la fois à droite et à gauche par rapport à la loi $\blacksquare$.

Exemple 1.4

Soient les lois internes $*$ et $\blacksquare$ définies par $a * b = a + b - a \times b$ et $a \blacksquare b = a + b - 1$
$*$ et $\blacksquare$ sont commutatives et on a $*$ est distributive par rapport à $\blacksquare$ car :

$$\begin{aligned} a * (b \blacksquare c) &= a * (b + c - 1) \\ &= a + (b + c - 1) - a \times (b + c - 1) \\ &= 2a + b + c - ab - ac - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ (a * b) \blacksquare (a * c) &= (a + b - ab) \blacksquare (a + c - ac) \\ &= a + b - ab + a + c - ac + 1 \\ &= 2a + b + c - ab - ac + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{aligned}$$

De (I) et (II) alors $*$ est distributive par rapport à $\blacksquare$

1.1.1.2 Les structures algébriques

1.1.1.2.1 Structure de groupe

Définition 1.3 : On définit sur l'ensemble non vide G une loi interne $*$
On dit que $(G,*)$ est un groupe si :

1. La loi interne $*$ est associative.
2. $*$ admet dans G un élément neutre $(\forall\, a \in G : a * e = a)$
3. Tout élément de G admet un élément symétrique.

Remarque 1.2

1. Si $(G,*)$ est un groupe est $*$ est commutative on dit que $(G,*)$ est un groupe commutatif (Abélien)

Exercice d'application 1.2

Lesquels de ces ceux qui suivent sont des groupes
$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{N}, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Q}, \times)$, avec $+$ et $\times$ sont la somme et le produit usuel.

1.1.1.2.2 L'ensemble et le groupe $Z/_{nZ}$

Définition 1.4 : Soit $n > 1$.
$Z/_{nZ}$ est l'ensemble $Z/_{nZ} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ où $\bar{p}$ désigne la classe d'équivalence de p *modulo* n.

$$\bar{p} = \bar{q} \Leftrightarrow p - q \ (mod\ n) = 0$$

- On définit une addition sur $Z/_{nZ}$ par : $\bar{p} + \bar{q} = \overline{p + q} = p + q \ (mod\ n)$.
- On définit le produit sur $Z/_{nZ}$ par : $\bar{p} \times \bar{q} = \overline{p \times q} = p \times q \ (mod\ n)$.

Remarque 1.3

- L'opposé de $\bar{k}$ est $-\bar{k} = \overline{-k} = \overline{n - k}$.
- L'inverse de $\bar{k}$ vérifie que $\bar{k} \times \overline{k^{-1}} = \bar{1} \Leftrightarrow \overline{k \times k^{-1}} = \bar{1}$

Remarque 1.4

$(Z/_{nZ}, +)$ est un groupe commutatif.

Exercice d'application 1.3

Lesquels de ces ceux qui suivent sont des groupes
$(\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}{}^*, \times)$ et $(\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}{}^*, \times)$

Définition 1.5 : Soit $(G,*)$ un groupe.
Une partie non vide $H \subset G$ est un sous-groupe de G si : 1. $\forall\, x, y \in H \Longrightarrow x * y \in H$
2. $\forall\, x \in H \Longrightarrow x' \in H$

Exemple 1.5

Soit $(\mathbb{Z}, +)$ un groupe.

$H = 6\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

On a $6\mathbb{Z} = \{\dots; -12;\ -6;\ 0; 6; 12; \dots\}$

1. $\forall\, x, y\ \Longrightarrow x + y \in H$
   $\forall\, x, y\ \in 6\mathbb{Z} \Longrightarrow \exists\, k,\ k'\ \in\ \mathbb{Z}$ tels que $x = 6k$ et $y = 6k'$
   Donc $x, y = 6(k + k') = 6k''$ alors $x +\ y \in\ \mathbb{Z}$.
2. $\forall\, x \in H\ \Longrightarrow x' \in H$
   $\forall\, x \in 6\mathbb{Z} \Longrightarrow\ x = 6k\ \Longrightarrow\ x' =\ -x = 6(-k) = 6k'''$ alors $x'\ \in H$

Donc $H = 6\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$

1.1.1.2.3 Structure d'anneau

Définition 1.6 : Soit $*$ et $\perp$ deux lois internes sur A.

On dit que A est un anneau si :

1. $(A,*)$ est un groupe commutatif.
2. La loi $\perp$ est associative.
3. La loi $\perp$ est distributive par rapport à $*$

Remarques 1.5

1. Si de plus la loi $\perp$ est commutative on dit que $(A,*,\perp)$ est un anneau commutatif
2. Si de plus A possède un élément neutre pour la loi $\perp$ on dit que $(A,*,\perp)$ est un anneau unitaire

Exemple 1.6

$(\mathbb{Z}, +,\times)$, $(\mathbb{Q}, +,\times)$, $(\mathbb{R}, +,\times)$ et $(\mathbb{C}, +,\times)$ sont des anneaux commutatifs.

1.1.1.2.4 Structure de corps

Définition 1.7 : Soit $*$ et $\perp$ deux lois internes sur $\mathbb{K}$.

On dit que le triplet $(\mathbb{K},*,\perp)$ est un corps si :

1. $(\mathbb{K},*,\perp)$ est un anneau unitaire.
2. $\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \{e_1\}, \exists\, x' \in\ \mathbb{K} : x \perp\ x' =\ x' \perp x = e_2$
   Tout élément (sauf e_1) admet un élément symétrique.

Remarque 1.6

Si de plus $\perp$ est commutative on dit que $(\mathbb{K},*,\perp)$ est un corps commutatif.

Exemple 1.7

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau
2. $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{e_1 = 0\}, \exists\, x' = {}^1/_x \in \mathbb{R} : x \times x' = x' \times x = 1 = e_2$

Exercice d'application 1.3

Est-ce que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps ?

Est-ce que $({}^{\mathbb{Z}}/_{7\mathbb{Z}}, +, \times)$ est un corps ?

1.1.2 Les espaces vectoriels

1.1.2.1 Espace vectoriel

Définition 1.8 : Soit $\mathbb{K}$ un corps de scalaire.

Un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel est un ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne (Addition) et une loi de composition externe (Produit), vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'addition est commutative $\forall\, u, v \in E : u + v = v + u$.
2. L'addition est associative $\forall\, u, v, w \in E : u + (v + w) = (v + u) + w = u + v + w$.
3. L'addition possède un élément neutre $\exists\, 0_E \in E : \forall\, u \in E : \mathrm{u} + 0_E = u$.
4. Tout vecteur possède un élément inverse (opposé) pour l'addition $\forall\, u \in E$, $\exists\, u'\, \mathrm{E} : u + u' = u + (-u) = 0_E$.
5. Le produit externe est associatif $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E : \lambda . (\mu . u) = \lambda . \mu(u)$.
6. Le produit externe possède un élément neutre, on le note $1_{\mathbb{K}} : \forall\, u \in E : u . 1_{\mathbb{K}} = u$.
7. Le produit externe est distributif par rapport à l'addition
    1. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in E : \lambda . (u + v) = \lambda . u + \lambda . v$
    2. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E : (\lambda + \mu) . u = \lambda . u + \mu . u$

Exemple 1.8

Si $\mathbb{K}$ est un corps des scalaires alors $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur K lui-même.

Exercice d'application 1.4

Vérifier les 8 axiomes qui font une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et définie par $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ ex + fy + gz = 0 \end{cases}$ un R-espace vectoriel

1.1.2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.9 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :

1. $0_E \in F$.
2. $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
3. $\lambda u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$.

Exemple 1.9

$\mathbb{Q}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.10

L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice d'application 1.5

1. Prouver que $\mathbb{Q}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
2. Prouver que F (l'ensemble de l'exemple 1.11) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1.7

Si E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E alors F est lui-même un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois induites par E.

1.1.2.1 Combinaison linéaire

Définition 1.10 : Soit $n > 1$ un entier et soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E.

Tout vecteur de la forme $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.8

Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est colinéaire à v_1.

Exemple 1.11

Le vecteur $u = \binom{9}{1}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = \binom{4}{1}$ et $v_2 = \binom{1}{1}$ car il existe deux scalaires $\lambda_1 = \frac{8}{3}$ et $\lambda_2 = \frac{-5}{3}$ tel que $u = \frac{8}{3} v_1 + \frac{-5}{3} v_2$

1.1.2.2 Independence linéaire

Définition 1.11 : Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une famille libre ou linéairement indépendante si la solution unique des scalaires dans l'équation $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$ est la solution trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$

Mathématiquement : $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, p\} : \lambda_i = 0$.

Exemple 1.12

Soit la famille suivante $\{\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\}$ est une famille libre.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0$$

1.1.2.3 Famille liée

Définition 1.13 : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $p \geq 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Exemple 1.13

Les polynômes $P_1(X) = 1 - X$ et $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ et $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ forment une famille liée dans l'espace $\mathbb{R}[X]$, car $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$.

Exercice d'application 1.6

Discuter selon les valeurs de a l'indépendance de la famille suivante : $\{\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}\}$.

1.1.2.4 Famille génératrice

Définition 1.14 : Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.

La famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Mathématiquement : $\forall\, v \in E, \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} : v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$.

On dit aussi que la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ engendre l'espace vectoriel E.

Exemple 1.14

La famille $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

$$u \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \forall\, u \in \mathbb{R}^2$$

Remarquant que cette famille n'est pas libre mais elle est génératrice.

1.1.2.5 Base d'un espace vectoriel

Définition 1.15 : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{B}$.

$$\forall\, v \in E\,, \exists!\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} :\ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

Exemple 1.15

La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice d'application 1.7

Prouver que $\mathcal{B}$ la famille de l'exemple 2.16 est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.1.2.6 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.16 : La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E, notée $dim\ E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E.

Remarque 1.9

On convient que la dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ est 0.

Exemple 1.16

1) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La dimension de $\mathbb{R}^2$ est donc 2.
2) $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ aussi est une base de $\mathbb{R}^2$, et elle est aussi de dimension 2.

Exemple 1.17

Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :

- $\mathbb{R}[X]$: l'espace vectoriel de tous les polynômes.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.2 Matrices

Définition 1.17 : Soient m et n deux entiers positifs.

Une matrice est un tableau rectangulaire (tableau à deux dimensions) de nombres disposés en lignes et en colonnes. Une matrice de $m \times n$ éléments, dans lequel m

est le nombre de lignes et n est le nombre de colonnes est notée avec une lettre comme A, et ses éléments sont dénotés avec a_{ij} où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Mathématiquement : En mathématiques, nous écrivons $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ce qui signifie que A est une matrice de taille $m \times n$ avec des éléments dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.18

$M = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -3 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×4 avec des éléments dans $\mathbb{Z}$.
On peut écrire aussi $M \in M_{2\times 4}(\mathbb{Z})$.

Exemple 1.19

$A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 2 \\ 6 & 55 & 5 \\ 14 & 10 & 0 \\ 9+15i & 0 & 5-i \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 4×3 avec des éléments dans $\mathbb{C}$.
On peut écrire aussi $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{C})$

Remarque 1.10

1. Un élément a_{ij} est situé dans la i[i'eme] ligne et la j[i'eme] colonne.
2. A peut être notée par : $A = (a_{ij})$.

1.2.1 Opération sur les matrices.

En algèbre linéaire, une relation (égalité) et quatre opérations (addition, soustraction, multiplication par un scalaire et multiplication des matrices) sont définis pour les matrices.

1.2.1.1 Egalité.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices. Deux matrices A et B sont dites égaux si :

1. A et B sont de la même taille.
2. $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 1.20

Les deux matrices suivantes A et B sont égaux.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & -1 & 0 \\ i & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & -1 & 0 \\ i & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Car ils ont la même taille 3×3 et $a_{ij} = b_{ij}\ \forall\ 1 \leq i, j \leq 3$.

1.2.1.2 Addition.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices, avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
$A + B$ est la matrice notée C tel que $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
L'addition est définie si les deux matrices ont le même nombre de colonnes et le même nombre de lignes.

Remarque 1.11

1. L'addition des matrices est commutative, c'est-à-dire $A + B = B + A$.
2. L'addition des matrices est associative, c'est-à-dire $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Exemple 1.21

$A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 23 & 6 \\ 6 & 5 & 33 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 18 & 36 & 7 & 10 \\ 20 & 4 & 6 & 29 \end{pmatrix}$ donc $A + B = C = \begin{pmatrix} 19 & 53 & 30 & 16 \\ 26 & 9 & 39 & 37 \end{pmatrix}$

1.2.1.3 Soustraction.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices, avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
$A - B$ est la matrice notée C tel que $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
La soustraction est définie si les deux matrices ont le même nombre de colonnes et le même nombre de de lignes.

Exemple 1.22

$A = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ donc $A - B = C = \begin{pmatrix} 16 & -11 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.1.4 Multiplication par un scalaire.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $m \times n$ et α un scalaire.
Le produit d'un scalaire α par une matrice A, est une matrice notée αA, est défini d'être la matrice obtenue en multipliant chaque élément de A par α.
$\alpha A = (\alpha \times a_{ij})$ pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 1.23

Soient $A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 \\ 1 & 17 & 9 \end{pmatrix}$ une matrice est $\alpha = 5$ un scalaire.

$$\alpha A = 5 \times \begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 \\ 1 & 17 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 12 & 5 \times 5 & 5 \times 2 \\ 5 \times 1 & 5 \times 17 & 5 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 25 & 10 \\ 5 & 85 & 45 \end{pmatrix}$$

Propriétés 1.1

Soient A et B deux matrices de même taille, et soient α et β deux scalaires.

1. $\alpha A = A\alpha$.
2. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

1.2.1.5 Multiplication des matrices.

Soient $A = a_{ik}$ une matrice de taille $m \times l$, et $B = b_{kj}$ une matrice de taille $l \times n$. La multiplication entre deux matrices A et B est définie si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice.

Le produit $A \times B$ est une matrice C de taille $m \times n$, où les éléments de la matrice C, c_{ij}, peuvent être calculée par la formule suivante :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \times b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix}_{m \times l} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}_{l \times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Exemple 1.24

Soient A une matrice de taille 1×3 et B une matrice de taille 3×2.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ donc $A \times B = \begin{bmatrix} -6 & 9 \end{bmatrix}$.

Exemple 1.25

Soient A une matrice de taille 3×5 et B une matrice de taille 5×4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ donc } A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 12 & 12 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 1.2

Soient A, B et C trois matrices où la multiplication est possible.

1. $(AB)C = A(BC)$.
2. $A(B + C) = AB + AC$.
3. $(B + C)A = BA + CA$.
4. Si A est une matrice carrée de taille $n \times n$ donc $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Remarque 1.13

1. En générale la multiplication des matrices n'est pas commutative $AB \neq BA$.
2. Si $AB = 0 \nRightarrow A = 0 \vee B = 0$.

Exemple 1.26

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 2.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mais $B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.27

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 2.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mais $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 1.8

Calculer le produit matriciel où il est possible

$\begin{pmatrix} a & 1 & c \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 11 & 56 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 45 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \\ 3 & 66 & 21 \end{pmatrix}$

1.2.2 Quelques matrices particulières.

1.2.2.1 Matrice carrée.

Définition 1.18 : Soit n un entier positif.

Une matrice carrée est une matrice dans laquelle il y a le même nombre de lignes et de colonnes $m = n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.14

Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les éléments du diagonal principal.

Exemple 1.28

$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 2.5 & 14 & \frac{6}{5} \\ 5 & 1.3 & 1.5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3 avec des éléments dans $\mathbb{R}$.

1.2.2.2 Matrice nulle.

Définition 1.19 : Soient m et n deux entiers positifs.

Une matrice nulle est une matrice si tous ses éléments sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Mathématiquement : $\forall a_{ij} \in A, a_{ij} = 0 \; avec \; 1 \leq i \leq m \; et \; 1 \leq j \leq n$

Remarque 1.12

Dans les matrices si A est une matrice nulle on peut écrire directement $A = 0$.

Exemple 1.29

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

1.2.2.3 Matrice d'identité.

Définition 1.20 : Soit n un entier positif.

Une matrice d'identité, notée souvent par I, est une matrice carrée avec des 1 sur le diagonal principal et 0 ailleurs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mathématiquement : $a_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases} \forall \; 1 \leq i \leq n, et \; 1 \leq j \leq n.$

Remarque 1.13

Une matrice d'identité de la taille $n \times n$ peut aussi être notée I_n.

Exemple 1.30

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d’identité de taille 3×3.

1.2.2.4 Matrice diagonale

Définition 1.21 : Soit A une matrice de taille $n \times n$.

On dit que A est une matrice diagonale si ses éléments en-dessous et au-dessus de la diagonale sont nuls.

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

Une matrice diagonale a la forme suivante : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

Exemple 1.31

U est une matrice diagonale.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2.2.5 Matrice triangulaire supérieure

Définition 1.22 : Soit A une matrice de taille $n \times n$.

On dit que A est triangulaire supérieure si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls.

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Exemple 1.32

U est une matrice triangulaire supérieure.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2.2.6 Matrice triangulaire inférieure

Définition 1.23 : Soit A une matrice de taille $n \times n$.

On dit que A est triangulaire inférieure si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls.

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

Une matrice triangulaire inferieure a la forme suivante : $A =$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.33

L est une matrice triangulaire inferieure.

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 3+i & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2.7 Matrice transposée.

Définition 1.24 : Soit A une matrice de taille $m \times n$.

La matrice transposée ou la transposée de A est la matrice de taille $n \times m$ notée A^T obtenue de A en échangeant son lignes par ses colonnes et vice versa.

Avec $(A^T)^T = A$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.34

Soit la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2.8 Matrice symétrique

Définition 1.25 : Soit A une matrice de taille $n \times n$.

A est symétrique si elle est égale à sa transposée; $A = A^T$: $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = 1, \dots, n$

Exemple 1.35
Soit la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

A est symétrique car $A = A^T$

Exercice d'application 1.9
Prouver que pour une matrice B quelconque, les matrices $B.B^T$ et $B^T.B$ sont symétriques.

1.2.2.9 Matrice antisymétrique
Définition 1.26 : Soit A une matrice de taille $n \times n$.
A est antisymétrique si $A^T = -A$,

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Exemple 1.36
Soit la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 6 & 0 & -8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

A est antisymétrique car $A^T = -A$.

1.2.3 Trace et déterminant d'une matrice.
1.2.3.1 Trace d'une matrice
Définition 1.27 : Soit A une Matrice carrée d'ordre n.
La trace de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Exemple 1.37
$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1 + 6 = 7$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ 9 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow tr(B) = 1 - 7 + 8 = 2.$

Propriétés 1.3
Soient A et B deux matrices d'ordre n.

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

2. $tr(\alpha A) = \alpha . tr(A)$ $avec$ $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. $tr(A^T) = tr(A)$.
4. $tr(AB) = tr(BA)$.

Exercice d'application 1.10

Prouver les propriétés.

1.2.3.2 Le déterminant.

Définition 1.28 : Soit A une Matrice carrée d'ordre n.

Le déterminant d'une matrice carrée A notée comme $det(A)$ est un scalaire calculé de façon récursive comme ci-dessous :

1. Si $n = 1, det(A) = a_{11}$.
2. Si $n = 2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$.
3. Si $n > 2, \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times \det(A_{ij})$ avec $1 \leq i \leq n$

Où A_{ij} est une matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{i'eme}$ ligne et la $j^{i'eme}$ colonne de A.

Remarque 1.14

Le déterminant est défini uniquement pour les matrices carrées.

Exemple 1.38

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2.$$

Exemple 1.39

Soit A une matrice carrée d'ordre 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 9 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 9 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 2 \times (0 \times 4 - 10 \times 1) - 5 \times (6 \times 4 - 9 \times 1) + (-4)(6 \times 10 - 9 \times 0) = -335.$$

Exercice d'application 1.11

Calculer le déterminant des matrices suivantes où il est possible.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&7&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2&a&-4\\0&7&1\\b&0&c\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}0&5&7\\1&6&9\end{pmatrix}\ D=\begin{pmatrix}1&-5&2&5\\4&9&10&0\\0&0&1&1\\3&-1&4&12\end{pmatrix}$$

1.2.4 Inverse d'une matrice.

Définition 1.29 : Soit A une Matrice carrée d'ordre n.

L'inverse d'une matrice carrée A est une matrice carrée B telle que $A\times B=B\times A=I_n$.

L'inverse de A est défini par: $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\times C^T$.

C est appelé cofacteur de A où $C=(-1)^{i+j}M_{ij}$ avec $1\leq i,j\leq n$ et M_{ij} est le déterminant de la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue à partir de A en supprimant la $i^{i'eme}$ ligne et la $j^{i'eme}$ colonne de A.

Remarque 1.15

1. L'inverse est défini uniquement pour les matrices carrées.
2. $det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existe.
3. I_n est inversible, et son inverse est I_n elle-même.

Propriétés 1.4

1. Si A est inversible, l'inverse est unique.
2. Soit A une matrice inversible, donc A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1}=A$.

Exemple 1.40

Soit la matrice A.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

Exercice d'application 1.12

Calculer l'inverse des matrices suivantes s'il existe.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2&4&-4\\0&7&1\\1&0&7\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}a&b\\-a&-b\end{pmatrix}\ D=\begin{pmatrix}1&-5&2&5\\4&9&10&0\\0&0&1&1\\3&-1&4&12\end{pmatrix}$$

1.2.5 Matrices semblables

Définition 1.30 : Soient A et B deux Matrices carrées de $M_n(\mathbb{K})$.

On dit que la matrice B est semblable à la matrice A ou A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Exemple 1.41

Soient A et B deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$..

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -98 & -13 \end{pmatrix}$

A et B sont deux matrices semblables car il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ tel que $B = P^{-1}AP$

Exercice d'application 1.13

Vérifier que A et B sont semblables

1.2.6 Valeurs et vecteurs propres.

1.2.6.1 Les valeurs et les vecteurs propres.

Définition 1.31 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

λ est dite valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que

$AX = \lambda X$, le vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Mathématiquement.

$$\lambda \; \textit{valeur propre de } A \Leftrightarrow \exists X \in (K^n)^* : AX = \lambda X.$$

$$X \; \textit{vecteur propre de } A \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : AX = \lambda X.$$

Exemple 1.42

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\lambda = 3$ est une valeur propre de A.

On a $\lambda \; \textit{valeur propre de } A \Leftrightarrow \exists X \in (K^n)^* : AX = \lambda X$ donc $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 6x + 3y = 3x \\ 5x + 8y = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x \Rightarrow \{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble de solutions.

Donc les solutions sont engendrées par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$.

Exemple 1.43

Vérifier que $X = (1 \quad 5/3)^t$ est un vecteur propre de la matrice A.

On a $X \; \textit{vecteur propre de } A \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : AX = \lambda X$ donc $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}$.

$$AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 55/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 11.$$

Donc il existe $\lambda = 11$ tel que $AX = \lambda X$, on dit que $\lambda = 11$ est la valeur propre associée au vecteur propre X.

Propriétés 1.5

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres associées à une matrice donnée A.

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = tr(A)$.
2. $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n = det\,(A)$.

1.2.6.2 Polynôme caractéristique.

Définition 2.32 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Le polynôme $p(\lambda) = det\,(A - \lambda I)$ est appelé Le polynôme caractéristique de A.

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Rightarrow p(\lambda) = 0$$

Exemple 1.44

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = de\,t(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9(1-\lambda)(5-\lambda) = 9\lambda^2 - 54\lambda + 45$ est le polynôme caractéristique de A.

Propriétés 1.6

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. A admet au plus n valeurs propres.
2. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.

Propriétés 1.7

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont semblable alors ils ont les mêmes valeurs propres.

Exemple 1.45

Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -98 & -13 \end{pmatrix}$

A et B sont deux matrices semblables qui ont les mêmes valeurs propres.

Exercice d'application 1.14

Vérifier les valeurs propres des matrices A et B.

1.2.7 Liens entre applications linéaires et matrices.

1.2.7.1 Application linéaire

Définition 1.33 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Une application f de E dans F est une application linéaire si

1. $f(u + v) = f(u) + f(v),\ pour\ tous\ u, v \in E.$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u),\ pour\ tout\ u \in E\ et\ tout\ \lambda \in \mathbb{K}.$

Remarque 1.16

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté L (E, F).

1.2.7.1.1 Image d'une application linéaire.

Définition 1.34 : E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application de E dans F.

$f(E)$ s'appelle l'image de l'application linéaire f et est noté $Im\ f$.

1.2.7.1.2 Le noyau d'une application linéaire.

Définition 2.35 : E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F.

Le noyau de f, noté $Ker(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F

$$Ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

1.2.7.2 Liens entre applications linéaires et matrices.

Définition 2.36 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$.

Exemple 1.46

Soit f l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y-z, x-2y+3z) \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On cherche la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

$$e_1 = (1 \quad 0 \quad 0) \Longrightarrow f(e_1) = (1 \quad 1) = f_1 + f_2$$
$$e_2 = (0 \quad 1 \quad 0) \Longrightarrow f(e_2) = (1 \quad -2) = f_1 - 2f_2$$
$$e_3 = (0 \quad 0 \quad 1) \Longrightarrow f(e_3) = (-1 \quad 3) = f_1 + f_2$$

Donc $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.47

Soit f l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y-z, x-2y+3z) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = ((1 \quad 1 \quad 0), (1 \quad 0 \quad 1), (0 \quad 1 \quad 1))$ une base de $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{A}' = (\sigma_1, \sigma_2) = ((1 \quad 0), (1 \quad 1))$ une base de $\mathbb{R}^2$.

On cherche la matrice $Mat_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(f)$.

$$\phi_1 = (1 \quad 1 \quad 0) \Longrightarrow f(\phi_1) = (2 \quad -1) = 3\sigma_1 - \sigma_2$$
$$\phi_2 = (1 \quad 0 \quad 1) \Longrightarrow f(\phi_2) = (0 \quad 4) = -4\sigma_1 + 4\sigma_2$$
$$\phi_3 = (0 \quad 1 \quad 1) \Longrightarrow f(\phi_3) = (0 \quad 1) = -\sigma_1 + \sigma_2$$

Donc $Mat_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques 1.17

Soient $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

1. la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépend du choix des bases.
2. $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.
3. $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda . Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

Remarques 1.18

Soient $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice d'application 1.15

Soit la fonction f

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2x - 4z, 3y, 5x + y + z)$$

1. Trouver une autre base de $\mathbb{R}^3$ différente de la base canonique.
2. Trouver la matrice associé à cette fonction dans cette base.

1.3 Normes et produit scalaire.

1.3.1 Normes vectoriels.

Définition 1.37 : Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des scalaires.

Une norme sur V est une application $\|.\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$, et $\|v\| \geq 0$, $\forall\, v \in V$.
2) $\|\alpha v\| = |\alpha|.\|v\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $v \in V$.
3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|\ \forall\, u,\ v \in V$.

Remarques 1.19

Une norme dans un espace vectoriel joue le même rôle de la valeur absolue.

1.3.1.1 Les p-normes

Définition 1.38 : Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des scalaires.

Soient $p > 0$ et $v \in V$.

La p-norme de v est définie par : $\|v\|_p = (|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Exemple 1.48

Si on prend $p = 1$ on trouve que $\|v\|_1 = (|v_1|^1 + |v_2|^1 + \cdots |v_n|^1)^{\frac{1}{1}} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

1.3.1.2 Les normes $1, 2\ et\ \infty$

Soit V un espace de dimension finie.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées en pratique.

$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

$\|v\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

$\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$.

Exemple 1.49

Si $v = (3 \quad 4-3i \quad 1)$ alors $\|v\|_1 = 9$ et $\|v\|_2 = \sqrt{35}$ et $\|v\|_\infty = 5$.

Exercice d'application 1.16

Prouver que les trois applications données sont des normes.

Exercice d'application 1.17

Calculer les normes $1, 2\ et\ \infty$ pour les vecteurs $u = (1 \quad -5i \quad 10)$ et $v = (7 \quad 3i)$

1.3.2 Normes de matrices.

Définition 1.39 : Une norme matricielle est une application de $\mathbb{C}^{m,n}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $\|A\| = 0 \Longrightarrow A = 0$, et $\|A\| \geq 0\ , \forall\ v \in V$.
2) $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|vA\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $v \in \mathbb{C}^{m,n}$.
3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\ \forall\ A,\ B \in \mathbb{C}^{m,n}$.
4) $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$ où il est possible.

1.3.2.1 Les p-normes

Définition 1.40 : Soient $p > 0$ et $A \in \mathbb{C}^{m,n}$.

La p-norme de A

$$\|A\|_p = \sup \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

Cette norme est une norme matricielle, appelée norme matricielle subordonnée (à la norme vectorielle donnée).

1.3.2.2 Les normes $1, 2\ et\ \infty$

Les trois normes matricielles les plus utilisées sont :

$\|A\|_1 = \max\limits_j \sum_i |a_{ij}|$.

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$.

$\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$.

Exemple 1.50

Si $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$ alors $\|A\|_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ et $\|A\|_2 = 2 =$ et $\|A\|_\infty = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

1.3.2.3 La norme matricielle de Frobenius

Définition 1.41 : $A \in \mathbb{C}^n$.

La norme matricielle de Frobenius est définie par $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^T A)}$.

Exemple 1.51

Si $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$ alors $\|A\|_F = \sqrt{6}$

1.3.3 Produit scalaire

Définition 1.42 : Un produit scalaire sur un espace vectoriel V est une application qui associer à chaque paire de vecteurs x, y un nombre avec :

1) $\langle x|x\rangle \geq 0$ et $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$.
2) $\langle x|\alpha y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle\ \forall\alpha \in \mathbb{K}$.
3) $\langle x|y + z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$.
4) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.

Exemple 1.52

L'application suivante définie un produit scalaire : $\langle A|B\rangle = tr(A^T B)$.

Exercice d'application 1.18

Prouver que $\langle A|B\rangle = tr(A^T B)$ est un produit scalaire.

Remarques 1.20

Si V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle x|y\rangle$, alors $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme sur l'espace V.

Bibliographie

1. Cours de Mathématiques d'Exo7.
2. Cours Algèbre linéaire de Dr. Adoui Université Batna 2.
3. Livre Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à L'optimisation de P. G. CIARLET (Masson 1988).
4. Livre Matrix Analysis and Applied Linear Algebra de Carl D. Meyer (SIAM 2000).
5. Livre Matrix Computations de Gene H. Golub, Charles F. Van Loan (The Johns Hopkins University Press 2013).