Université Batna 2
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département d'Informatique

Méthodes Numériques

Oussama HARKATI

Cours, $2^{\grave{e}me}$ année licence Informatique

2023-2024

Contenu de la matière

Chapitre 2

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires.

2.1 Introduction.

2.1.1 Système Linéaire.

Définition 2.1 : On appelle système linéaire d'ordre n, $(n \in \mathbb{N})$, une expression de la forme : $Ax = b$.

Ici A est une matrice carrée d'ordre n, c'est-à-dire de $n \times n$ éléments réels ou complexes noté a_{ij} avec $1 \leq i, j \leq n$.

b est un vecteur colonne réel ou complexe de n éléments noté b_i avec $1 \leq i \leq n$, et x aussi est un vecteur colonne de n inconnus du système, noté x_i avec $1 \leq i \leq n$.

Le système $Ax = b$ peut être représenté par les notations matricielles.

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le même système peut être écrit explicitement sous la forme d'un système de n équations à n inconnus $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ou sous la forme suivante : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ avec $i = 1 \dots n$.

Exemple 2.1

Le système suivant est un système linéaire d'ordre 4.

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4i \\ \sqrt{5} & 0 & 16 & 1 \\ e & -8 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & \pi & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1-3i \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 - 3x_2 + (4i)x_4 = 15 \\ \sqrt{5}x_1 + 16x_3 + 1x_4 = 1-3i \\ (e)x_1 - 8x_2 + 7x_4 = 0 \\ 1x_1 + 6x_2 + \pi x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

Remarque 2.1

1. A est notée aussi $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$.
2. b est notée aussi $b = (b_i), 1 \leq i \leq n$.
3. x est notée aussi $x = (x_i), 1 \leq i \leq n$.

2.1.2 Systèmes particuliers.

2.1.2.1 Système diagonal.

Définition 2.2 : On dira qu'un système linéaire est diagonal si est seulement si la matrice A est diagonale i.e. $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ou $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} \neq 0 \ \forall\ i = 1 \dots n$.

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, n}$$

Coût : n divisions.

Exemple 2.2

Le système suivant est un système diagonal d'ordre 4.

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = 7 \\ 5x_2 = 3 \\ 7x_3 = 0 \\ 4x_4 = 8 \end{cases}$$

2.1.2.2 Système triangulaire supérieur.

Définition 2.3 : On dira qu'un système linéaire est triangulaire supérieur si est seulement si la matrice A est triangulaire supérieure i.e. $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ou $a_{ij} = 0$ si $i > j$ et $a_{ii} \neq 0 \ \forall\ i = \overline{1, n}$.

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Coût : $\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions), $\frac{:n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions.

Exemple 2.3

Le système suivant est un système triangulaire supérieur d'ordre 4.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 3x_4 = 4 \\ 5x_2 + 8x_3 + 1x_4 = 11 \\ 7x_3 + 6x_4 = 1 \\ 4x_4 = 8 \end{cases}$$

2.1.2.3 Système triangulaire inférieur.

Définition 2.4 : On dira qu'un système linéaire est triangulaire inférieur si est seulement si la matrice A est triangulaire inférieure i.e. $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ ou $a_{ij} = 0$ si $i < j$ et de plus $a_{ii} \neq 0 \; \forall \, i = \overline{1,n}$.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Coût : $\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions), $\frac{:n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions.

Exemple 2.4

Le système suivant est un système linéaire d'ordre 4.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = 15 \\ 6x_1 + 1x_2 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 1x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

2.1.3 Résolution des systèmes linéaires.

2.1.3.1 Méthode de Cramer.

La méthode de Cramer consiste à résoudre le système linéaire $Ax = b$ par la formule suivante : $x_i = {detA_i}/_{detA}$

Où A_i est une matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{i'eme}}$ colonne de A par le vecteur b.

Cependant l'application de cette formule est inacceptable pour la résolution pratique des systèmes, car son coût (ou nombre d'opérations) est en $O\big((n+1)!\big)$ par exemple pour un système linéaire d'ordre $n = 25$ la complexité est de l'ordre de 4×10^{26} opérations, sur un ordinateur effectuant 10^9 opérations par seconde il faudrait au moins 10^{10} années (dix milliards d'années) pour résoudre ce système linéaire.

Remarque 2.2

Théoriquement, la solution d'un système linéaire $Ax = b$ existe si A est inversible.

Exemple 2.5

Soit le système linéaire suivant : $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Résoudre ce système on utilisant la méthode de Cramer.

1. On a $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
2. On va calculer le déterminant de A et les déterminant de A_1 et A_2
   $\boldsymbol{det}\ A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$ et $\boldsymbol{det}\ A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ et $\boldsymbol{det}\ A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -17$
3. On a donc $x_1 = \frac{\boldsymbol{det}\ A_1}{\det A} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{\boldsymbol{det}\ A_2}{\det A} = \frac{-17}{-3} = \frac{17}{3}$

Exercice d'application 2.1

En utilisant la méthode de Cramer, trouve la solution des systèmes suivants :

$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 5 \\ 12 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.1.3.2 Résolution des systèmes triangulaires.

2.1.3.2.1 Résolution des systèmes triangulaires inférieurs.

Soient le système triangulaire inférieur suivant :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donc le système $Ax = b$ se résout par la méthode descendante, c'est-à-dire on trouve d'abord x_1 puis x_2, ..., puis x_n; d'où les relations :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right), i = 2, \dots, n \end{cases}$$

2.1.3.2.1 Résolution des systèmes triangulaires supérieurs.

Soient le système triangulaire supérieur suivant :

$$A'x' = b' \Leftrightarrow \begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}'x'_n = b'_1 \\ a'_{22}x'_2 + \cdots + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{nn}x'_n = b'_n \end{cases}$$

Donc le système $Ax = b$ se résout par la méthode ascendante, c'est-à-dire on trouve d'abord x'_n puis x'_{n-1}, …, puis x'_1; d'où les relations :

$$\begin{cases} x'_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}} \\ x'_i = \dfrac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{i-n} a'_{ij}x'_j\right), i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Exemple 2.6.

Résoudre le système linéaire suivant $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix}$

Ce système est un système triangulaire supérieur, donc on va commencer par le calcul de $x_3 = \frac{21}{7} = 3.$

Ensuite on va passer pour calculer x_2 et x_1

$x_2 = \frac{1}{4}\big(30 - (2 \times 3)\big) = 6$ et $x_1 = \frac{1}{2}\big(49 - (5 \times 6 + 3 \times 3)\big) = 5$

Exemple 2.7.

Résoudre le système linéaire suivant $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 136 \\ 140 \end{pmatrix}$

Ce système est un système triangulaire inférieur, donc on va commencer par le calcul de $x_1 = \frac{99}{3} = 33.$

Ensuite on va passer pour calculer x_2 et x_3

$x_2 = \frac{1}{10}\big(136 - (2 \times 33)\big) = 7$ et $x_3 = \frac{1}{3}\big(140 - (1 \times 33 + 2 \times 7)\big) = 31$

Remarque 2.3.

Soit $Ax = b$ un système linéaire d'ordre n.

Pour un tel système linéaire, il y'a exactement trois possibilité pour l'ensemble des solutions

- Solution unique : Il y a une seule solution qui satisfasse toutes les équations simultanément.
- Pas de solution : Il n'existe aucune solution qui satisfasse toutes les équations simultanément.
- Une infinité des solutions : Il y a infiniment beaucoup de différents ensembles de valeurs qui satisfont toutes les équations simultanément.

2.2 Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires.

Comme on a vu dans la section précédente, la résolution des systèmes linéaires n'est pas toujours facile ou raisonnable, car la résolution peut-être très couteuse. Par contre, les systèmes triangulaires supérieurs ou inférieurs sont faciles à manipuler et à résoudre, mais les systèmes linéaires se présentent souvent sous une forme aléatoire que sous la forme des systèmes triangulaires supérieurs ou inférieurs.

Il faut donc développer des algorithmes alternatifs avec un coût raisonnable. Ce problème est un des plus importants de l'analyse numérique.
Ces méthodes se divisent en deux catégories :

- Méthodes directes : Ce sont des méthodes qui permettent d'obtenir la solution x en un nombre fini (en relation avec n) d'opérations élémentaires.
- Méthodes itératives : Ce sont des méthodes qui consistent à construire une suite de vecteurs $x(n)$ convergeant vers la solution x.

2.2.1 Méthode d'élimination de Gauss.

Comme on a vu, les systèmes triangulaires sont faciles et économiques à résoudre, donc l'objectif est de transformer tout système linéaire en système triangulaire équivalent. Parmi les algorithmes de transformation, l'élimination de Gauss qui a été proposée par le prince des mathématiciens *Carl Friedrich Gauss* reste encore actuellement la plus utilisée pour résoudre les systèmes linéaires.

2.2.1.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode est de transformer le système à un système triangulaire supérieur équivalent par la multiplication des deux côtés du système original par une matrice M inversible telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure.

$$Ax = b \Leftrightarrow (MA)x = Mb$$

Ensuite résoudre le système triangulaire supérieur $(MA)x = Mb$ par l'algorithme de remontée.

Remarque 2.4

1. Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble des solutions.
2. En pratique on calcule la matrice M d'une façon implicite par des transformations équivalentes on ramène le système de départ en un système à matrice triangulaire supérieure.

$$(A, b) \xrightarrow{transformaton} \left(A^{(n)}, b^{(n)}\right)$$

Ou $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure, puis on résout le système triangulaire supérieur $A^{(n)}x = b^{(n)}$.

2.2.1.2 Algorithme d'élimination

On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$.

$$\left(A^{(1)} \vdots\ b^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

- A la $1^{i'ere}$ étape

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)} \text{ où } \alpha_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \end{cases}$$

Où $L_i^{(k)}$ est la $i^{i'eme}$ ligne de $\left(A^{(k)}, b^{(k)}\right)$, $1 \leq i \leq n$ et $k \leq n$.
Donc on obtient :

$$\left(A^{(2)} \vdots\ b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & \vdots & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(2)}, 1 \leq j \leq n; \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \end{cases} \\ a_{i1}^{(2)} = 0, 2 \leq i \leq n; \\ \begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \alpha_{i1} a_{1j}^{(1)}, 2 \leq i, j \leq n; \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \alpha_{i1} b_1^{(1)}, 2 \leq i \leq n. \end{cases} \end{cases}$$

- A la $k^{i'eme}$ étape
- Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)}, 1 \leq i \leq k. \\ L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \alpha_{ik} L_k^{(k)} \text{ où } \alpha_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Où $L_i^{(k)}$ est la i^{eme} ligne de $\left(A^{(k)}, b^{(k)}\right)$, $1 \leq i \leq n$ et $k \leq n$.
Donc on obtient :

$$\left(A^{(k+1)} \vdots\ b^{(k+1)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} & \vdots & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k)} & \vdots & b_2^{(k)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} & \vdots & b_k^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & \vdots & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & \vdots & b_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Qui est équivalent à : }\begin{cases}\begin{cases}a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}, 1\le j\le n;\\ b_1^{(2)}=b_1^{(1)};\end{cases}\\ a_{ij}^{(k+1)}=0, 1\le j\le k, k+1\le i\le n;\\ \begin{cases}a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-\alpha_{ik}a_{kj}^{(k)}, k+1\le i,j\le n;\\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-\alpha_{ik}b_k^{(k)}, k+1\le i\le n.\end{cases}\end{cases}$$

Coût : le coût total de la méthode de Gauss (élimination et résolution d'un système triangulaire) est $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n + n^2 = O(\frac{2}{3}n^3)$.

Exemple 2.8.

Soit le système linéaire suivant

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1\\ 6x_1+2x_2+x_3=-1\\ -2x_1+2x_2+1x_3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&1\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\Leftrightarrow Ax=b$$

D'où

$$\left(A^{(1)}\vdots\ b^{(1)}\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&1&\vdots&1\\6&2&1&\vdots&-1\\-2&2&1&\vdots&7\end{pmatrix}$$

- On calcule $\left(A^{(2)}\vdots\ b^{(2)}\right)$

On a $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)}$ et $L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i1}L_1^{(1)}$ où $\alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ d'où après cette étape :

$$\left(A^{(2)}\vdots\ b^{(2)}\right)=\begin{pmatrix}2&1&1&\vdots&1\\ & & &\vdots& \\ & & &\vdots& \end{pmatrix}$$

1) $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} - \alpha_{21}L_1^{(1)}$ où $\alpha_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{6}{2} = 3$ on trouve :

$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - 3 \times a_{11}^{(1)} = 6 - 3(2) = 0$ $\qquad a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - 3 \times a_{12}^{(1)} = 2 - 3(1) = -1$

$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - 3 \times a_{13}^{(1)} = 1 - 3(1) = -2$ $\qquad a_{24}^{(2)} = a_{24}^{(1)} - 3 \times a_{14}^{(1)} = -1 - 3(1) = -4$

$$\text{Alors après cette étape } \left(A^{(2)}\vdots\ b^{(2)}\right)=\begin{pmatrix}2&1&1&\vdots&1\\0&-1&-2&\vdots&-4\\ & & &\vdots& \end{pmatrix}$$

2) $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \alpha_{31}L_1^{(1)}$ où $\alpha_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -1$

$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} + 1 \times a_{11}^{(1)} = -2 + 1(2) = 0$ $\qquad a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} + 1 \times a_{12}^{(1)} = 2 + 1(1) = 3$

$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + 1 \times a_{13}^{(1)} = 1 + 1(1) = 2$ $\qquad a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} + 1 \times a_{14}^{(1)} = 7 + 1(1) = 8$

A la fin de cette étape on trouve que $\left(A^{(2)} : b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & -4 \\ 0 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$

- On calcule $\left(A^{(3)} : b^{(3)}\right)$ on utilisant $\left(A^{(2)} : b^{(2)}\right)$

On a $L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - \alpha_{i2} L_2^{(2)}$ où $\alpha_{i1} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$.

1) $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} - \alpha_{32} L_2^{(2)}$ où $\alpha_{31} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -3$

$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - 3 \times a_{22}^{(2)} = 3 - 3(1) = 0$ $\qquad$ $a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - 3 \times a_{23}^{(2)} = 2 - 3(-2) = -4$

$a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)} - 3 \times a_{24}^{(2)} = 8 - 3(-4) = -4$

A la fin on trouve $\left(A^{(3)} : b^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -4 \end{pmatrix}$

Donc notre système diagonalisé sera

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On va commencer par le calcul de $x_3 = \frac{-4}{-4} = 1.$

Ensuite on va passer pour calculer x_2 et x_1

$x_2 = -1\left(-4 - (-2 \times 1)\right) = 2$ et $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - (1 \times 2 + 1 \times 1)\right) = -1$

Exercice d'application 2.2

Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.

$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 4x_3 = 5 \\ 9x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -6 \\ -1x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$

Remarque 2.5

Les éléments de la diagonale de la matrice A sont appelés les pivots de Gauss où simplement les pivots.

2.2.1.3 Elimination avec changement de pivot.

Parfois, quand on veut résoudre un système linéaire en utilisant la méthode d'élimination de Gauss, on tombe dans un cas où l'un des pivots est nul, dans ce cas on ne peut pas appliquer l'algorithme d'élimination, et pour résoudre ce problème il faut appliquer ce qu'on appelle un changement de pivot (pivotage).

Au cours de la triangularisation, si l'on trouve que l'un des pivots $a_{kk}^{(k)} = 0$ on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure $L_p, k + 1 \leq p \leq n$ dont l'élément de la $k^{i'eme}$ colonne $a_{pk}^{(k)}$ est non nul, mais Il ne faut pas utiliser des pivots trop petits car les erreurs d'arrondi peuvent donner des solutions fausses.
Un moyen de contourner le problème d'un pivot nul ou presque est d'utiliser la technique de pivotage.
Il existe deux stratégies de pivotage :

- Pivotage Partiel
  À la $k^{i'eme}$ étape $(1 \leq k \leq n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot partiel est choisi parmi les coefficients $\left(a_{ik}^{(k)}\right)_{k \leq i \leq n}$ tel que sa valeur absolue soit la plus grande, on permute ensuite si $(i \neq k)$ la ligne $k^{i'eme}$ et la ligne du pivot choisi.
- Pivotage total
  À la $k^{i'eme}$ étape $(1 \leq k \leq n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot total est choisi parmi les coefficients $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{k \leq i,j \leq n}$ tel que sa valeur absolue soit la plus grande, puis on fait les permutations des lignes et des colonnes correspondantes. Cette technique n'est utilisée que dans de rares cas pratiques.

Remarque 2.6

1. A chaque permutation de colonnes les inconnues changent de places.
2. La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle "Gauss ordinaire".

Exemple 2.9

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 6x_1 + 8x_2 + 1x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = b$$

On a $a_{11} = 0$, donc on doit faire une permutation avec la troisième ligne car $6 > 5$ (pivotage partiel)
D'où

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^{(1)} \vdots\ b^{(1)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & \vdots & 3 \\ 5 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

- On calcule $\left(A^{(2)} \vdots\ b^{(2)}\right)$

On a $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)}$ et $L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)}$ où $\alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ d'où après cette étape :

$$\left(A^{(2)} \vdots\ b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & \vdots & 3 \\ & & & \vdots & \\ & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

1) $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} - \alpha_{21} L_1^{(1)}$ où $\alpha_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{5}{6}$

$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - \frac{5}{6} \times a_{11}^{(1)} = 5 - \frac{5}{6}(6) = 0$

$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - \frac{5}{6} \times a_{12}^{(1)} = 2 - \frac{5}{6}(8) = \frac{-14}{3}$

$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - \frac{5}{6} \times a_{13}^{(1)} = 3 - \frac{5}{6}(1) = \frac{13}{6}$

$a_{24}^{(2)} = a_{24}^{(1)} - \frac{5}{6} \times a_{14}^{(1)} = 4 - \frac{5}{6}(3) = \frac{3}{2}$

Alors après cette étape $\left(A^{(2)} \vdots\ b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & \frac{-14}{3} & \frac{13}{6} & \vdots & \frac{3}{2} \\ & & & \vdots & \end{pmatrix}$

2) $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \alpha_{31} L_1^{(1)}$ où $\alpha_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0$

$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} + 0 \times a_{11}^{(1)} = 0 + 0(2) = 0$

$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} + 0 \times a_{12}^{(1)} = 1 + 0(1) = 1$

$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + 0 \times a_{13}^{(1)} = 3 + 0(1) = 3$

$a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} + 0 \times a_{14}^{(1)} = 1 + 0(1) = 1$

A la fin de cette étape on trouve que $\left(A^{(2)} \vdots\ b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & \frac{-14}{3} & \frac{13}{6} & \vdots & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

- On calcule $\left(A^{(3)} \vdots\ b^{(3)}\right)$ on utilisant $\left(A^{(2)} \vdots\ b^{(2)}\right)$

On a $L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - \alpha_{i2} L_2^{(2)}$ où $\alpha_{i1} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$.

1) $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} - \alpha_{32} L_2^{(2)}$ où $\alpha_{31} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-3}{14}$

$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - \frac{3}{14} \times a_{22}^{(2)} = 1 + \frac{3}{14}\left(\frac{-14}{3}\right) = 0$

$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \frac{3}{14} \times a_{23}^{(2)} = 3 + \frac{3}{14}\left(\frac{13}{6}\right) = \frac{97}{28}$

$a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)} - \frac{3}{14} \times a_{24}^{(2)} = 1 + \frac{3}{14}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{37}{28}$

A la fin on trouve $\left(A^{(3)} \vdots\ b^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & \frac{-14}{3} & \frac{13}{6} & \vdots & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{97}{28} & \vdots & \frac{37}{28} \end{pmatrix}$

Donc notre système diagonalisé sera

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{-14}{3} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & \frac{97}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{37}{28} \end{pmatrix}$$

On va commencer par le calcul de $x_3 = \frac{37}{28} \times \frac{28}{97} = \frac{37}{97}$.
Ensuite on va passer pour calculer x_2 et x_3

$x_2 = -\frac{3}{14}\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{13}{6} \times \frac{37}{97}\right)\right) = \frac{-14}{97}$ et $x_1 = \frac{1}{6}\left(3 - \left(8 \times \frac{-14}{97} + 1 \times \frac{37}{97}\right)\right) = \frac{61}{97}$

Exercice d'application 2.3

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Gauss.

$\begin{cases} -5x_2 + 2x_3 = 14 \\ 9x_1 + 7x_2 + 1x_3 = 25 \\ 9x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -6 \\ -1x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} 1x_2 + 4x_3 = 3 \\ -1x_1 - 1x_3 = 13 \\ 9x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$

Remarque 2.7

Soit A une $m \times n$ matrice dont le nombre de lignes m est plus grand que le nombre de colonnes n, et b un vecteur de m ligne.
Le système $Ax = b$ est dit système surdéterminé (plus d'équations que d'inconnues) et dans bien des cas il n'a pas de solution qui satisfait les m équations.

2.2.2 La factorisation LU.

2.2.2.1 Principe de la méthode.

1. Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = L \times U$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.
2. Résolution : Le système $Ax = b$ devient : $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

   On pose $Ux = y$ d'où $Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

   Donc la résolution du système $Ax = b$ revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Définition 2.5 : A_k est la sous-matrice principale d'ordre k de A si A_k est la $k \times k$ matrice de coefficients a_{ij}, $1 \leq i, j \leq k$ et $1 \leq k \leq n$.

Exemple 2.10

Soit la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & -9 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, les sous-matrices principales de A sont :

$A_1 = (1)$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ et $A_3 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & -9 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 2.1 : Si toutes les sous-matrices principales A_k de A sont inversible, alors les pivots obtenus successivement dans l'élimination de Gauss sont tous non nuls, d'où il existe une décomposition unique $A = LU$.
D'où L est une matrice triangulaire inférieure avec des valeurs 1 dans sa diagonale, et U est une matrice triangulaire supérieure, de plus U est celle obtenue par l'algorithme d'élimination de Gauss.

2.2.2.2 Algorithme de la méthode

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on écrit l'égalité $A = LU$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ l_{31} & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

La détermination des éléments de L et U cherchés se fait suivant l'algorithme général :

$$\begin{cases} l_{ii} = 1, 1 \leq i \leq n; \\ \begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, 1 \leq j \leq n; \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}, 2 \leq i \leq n; \end{cases} \\ \begin{cases} u_{mj} = a_{mj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} \,.\, u_{kj}, m \leq j \leq n \; et \; 2 \leq m \leq n \\ l_{im} = \dfrac{(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} \,.\, u_{km})}{u_{mm}}, m+1 \leq i \leq n \; et \; 2 \leq m \leq n \end{cases} \end{cases}$$

Coût : le coût total de la méthode est $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$ = coût de Gauss.

Supposons qu'on veut résoudre le système $Ax = b$. Décomposons A sous forme LU, alors $Ax = b$ devient $(LU)x = b$ ou encore $L(Ux) = b$. Posons $y = Ux$, on cherche alors y tel que $Ly = b$ est un système triangulaire inférieur qu'on résout par la méthode descendante. y étant trouvé, on cherche x tel que $Ux = y$ est un système triangulaire supérieur qu'on résout par la méthode ascendante.

Exemple 2.11

Soit le système linéaire suivant : $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

On veut transformer $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ à $A = LU =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{12} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

D'abord, on a $u_{1j} = a_{1j}, 1 \leq j \leq n$; donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

et $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, 2 \leq i \leq n$ ce qui implique que $l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-1}{2}$ et $l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{2}$ d'où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Maintenant on va passer pour le calcul des u_{mj}
on a $u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}\,.\,u_{kj}, m \leq j \leq n \; et \; m = 2$
$u_{22} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}\,.\,u_{kj} = a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{2k}\,.\,u_{k2} = a_{22} - l_{21}.u_{12} = 3 + \frac{1}{2} \times (-5) = \frac{1}{2}$.
$u_{23} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}\,.\,u_{kj} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k}\,.\,u_{k3} = a_{23} - l_{21}.u_{13} = -1 + \frac{1}{2} \times (1) = \frac{-1}{2}$.

m j

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Enfin on va calculer l_{32} et u_{33}

$l_{im} = \frac{(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik}.u_{km})}{u_{mm}}, m + 1 \leq i \leq n \; et \; 2 \leq m \leq n$

$l_{32} = \frac{(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik}.u_{km})}{u_{mm}} = \frac{(a_{32} - l_{31}.u_{12})}{u_{22}} = \frac{\left(-4 - \frac{3}{2} \times -5\right)}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(-4 - \frac{3}{2} \times -5\right) = 7$

i m

$$A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\-1&3&-1\\3&-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0\\\frac{3}{2}&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$$

On a donc $u_{mj}=a_{mj}-\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}\,.\,u_{kj}, m\leq j\leq n \; et \; m=3$

$u_{33}=a_{33}-\sum_{k=1}^{2} l_{3k}\,.\,u_{k3}=a_{33}-(l_{31}.u_{13}+l_{32}.u_{23})=2-(\frac{3}{2}\times(1)+7\times\left(\frac{-1}{2}\right))=4.$

La décomposition de A est :

$$A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\-1&3&-1\\3&-4&2\end{pmatrix}=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0\\\frac{3}{2}&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&4\end{pmatrix}$$

Le système $Ax=b\Leftrightarrow LUx=b$ avec $Ux=y$.

- $1^{i'ere}$ étape

  Résoudre le système $Ly=b$.

  $$\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{2}&1&0\\\frac{3}{2}&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-8\\16\end{pmatrix}$$

  On a ce système est un système triangulaire inférieur, donc on va commencer par le calcul de $x_1=12$.

  Ensuite on va passer pour calculer x_2 et x_3

  $x_2=1\left(-8-\left(-\frac{1}{2}\times 12\right)\right)=-2$ et $x_3=1\left(16-\left(\frac{3}{2}\times 12+7\times -2\right)\right)=12$

- $2^{i'eme}$ étape

  Résoudre le système $Ux=y$.

  $$\begin{pmatrix}2&-5&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-2\\12\end{pmatrix}$$

  On a ce système est un système triangulaire supérieur, donc on va commencer par le calcul de $x_3=\frac{12}{4}=3.$

  Ensuite on va passer pour calculer x_2 et x_1

$x_2 = 2\left(-2-\left(-\frac{1}{2}\times 3\right)\right) = -1$ et $x_1 = \frac{1}{2}\left(12-(-5\times -1+1\times 3)\right) = 2.$

Exercice d'application 2.3

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la factorisation LU.

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=10 \\ 4x_1+7x_2+7x_3=25 \\ 6x_1+18x_2+22x_3=40 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x_1+2x_2-3x_3=4 \\ 4x_1+8x_2+12x_3=-8 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

Remarque 2.8

Supposons que la matrice A soit inversible, mais qu'au cours de la décomposition LU, l'un des pivots soit nul. Il convient dans ce cas d'échanger la ligne du pivot nul avec une autre ligne afin d'obtenir un pivot non nul, mais dans ce cas la décomposition LU sera une décomposition de la matrice A dans laquelle nous avons permuté des lignes.

Bibliographie

1. Cours de licence de Mathématiques d'Analyse Numérique de Karima MEBARKI (Université Abderrahmane Mira, Béjaia).
2. Cours de licence d'Informatique de Méthode Numérique de Sarah OTSMANE (Université Batna 2, Batna).
3. Cours d'Analyse Numérique de Mazen SAAD (Ecole Centrale de Nantes).
4. Livre Introduction à l'Analyse Numérique de Jacques RAPPAZ, Marco PICASSO (Presses polytechnique et universitaire romandes, 2017).
5. Livre Matrix Analysis and Applied Linear Algebra de Carl D. Meyer (SIAM 2000).