Université Batna-2
Faculté des Mathématique et d'informatique
Département d'informatique
module : probabilités et Statistique ($L3$)
Corrigé **Série** n : 1 (*espaces probabilisés*)

Exercice 1 On jette en l'air une pièce de monnaie et un dé, et l'on suppose que l'ensemble fondamental se compose des 12 éléments $\Omega = \{F1, F2, F3, F4, F5, F6, P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$

- Exprimer d'une façon explicite les événements suivants: $A = \{F2, F4, F6\}$; $B = \{F2, F3, F5, P2, P3, P5\}$; $C = \{P1, P3, P5\}$.
- Exprimer d'une façon explicite les événements : (a) A ou B est réalisé, $A \cup B = \{...\}$ (b) B et C est réalisé,$B \cap C = \{...\}$ (c) B seulement est réalisé.$B \cap A^c \cap C^c = \{F3, F5, P2\}$
- A et C s'excluent mutuellement (ils sont incompatibles) puisque $A \cap C = \varnothing$

Exercice 2 $\Omega = \{FF1, FF2, FF3, FF4, FF5, FF6, PF1, PF2, PF3, PF4, PF5, PF6, FP1, FP2, FP3, FP4, F$

- $A = \{FF2, FF4, FF6\}$, $B = \{FF2, PF2, FP2, PP2, \}$, $C = \{FP2, FP3, FP5, PF2, PF3, PF5\}$
- A et B se réalisent $A \cap B = \{...\}$, B seulement se réalisent $B \cap A^c \cap C^c = \{;;;\}$, B ou C $B \cup C =;;;$

Exercice 3 On suppose qu'un ensemble fondamental Ω est formé de 4 éléments $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. laquelle des fonctions suivantes définit une probabilité sur Ω ?

- $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$; $P(\omega_2) = \frac{1}{3}$; $P(\omega_3) = \frac{1}{4}$; $P(\omega_4) = \frac{1}{5}.NON$ puisque la somme est supérieure à 1.
- $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$; $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$; $P(\omega_3) = -\frac{1}{4}$; $P(\omega_4) = \frac{1}{2}.NON$ puisque $P(\omega_3)$ est négatif.
- $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$; $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$; $P(\omega_3) = \frac{1}{8}$; $P(\omega_4) = \frac{1}{8}.OUI$ puisque la somme est égale à 1 et les toutes les valeurs de P sont positives.
- $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$; $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$; $P(\omega_3) = \frac{1}{4}$; $P(\omega_4) = 0.OUI$ puisque la somme est égale à 1 et les toutes les valeurs de P sont positives ou nulles.

Exercice 4

- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$ alors $P(\omega_1) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) = \frac{7}{18}$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$ alors $2P(\omega_2) + P(\omega_2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ donc $P(\omega_2) = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\right] = ...$
- On pose $A = \{\omega_2, \omega_3\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_4\}$ alors $A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\omega_1\}^c$ et $A \cap B = \{\omega_2\}$. On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ alors $P(\{\omega_1\}^c) = \frac{7}{12}$ finalement $P(\{\omega_1\}) = 1 - P(\{\omega_1\}^c) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

Exercice 5 On a $P(F) + P(P) = 1$ et $P(F) = 2P(P)....P(P) = \frac{1}{3}$ et $P(F) = \frac{2}{3}$

Exercice 7 Deux hommes et trois femmes participent à un tournoi d'échecs. Les individus de même sexe ont des chances égales de gagner, mais un homme a deux fois plus de chance de gagner qu'une femme.

- Calculer la probabilité pour qu'une femme gagne le tournoi.

$\Omega = \{H_1, H_2, F_1, F_2, F_3\}$
Soit $P(F_1) = p$, on a alors $P(F_2) = P(F_3) = p$ et $P(H_1) = P(H_2) = 2p$ La somme des cinq probabilités doit etre égales à 1, donc $P + P + P + 2P + 2P = 1$ alors $P = \frac{1}{7}$.
Soit l'événement $A =$"une femme gagne le tournoi"$= \{F_1, F_2, F_3\}$
Alors $P(A) = P(\{F_1, F_2, F_3\}) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

1. - Si un homme et une femme sont mariés, calculer la probabilité pour que l'un d'eux gagne le tournoi.

Soit l'événement $B =$"l'homme marié ou son épouse gagne le tournoi"$= \{H_1, F_1\}$
$P(B) = P(\{H_1, F_1\}) = P(H_1) + P(F_1) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

Exercice 8 Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié a également les yeux marron. Calculer la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard soit un garçon ou ait les yeux marron.

Soient les événements $A =$"*l'élève est un garcon*", $B =$"*l'élève a les yeux marron*"
$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$; alors on cherche $P(A \cup B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice 9 On choisit deux cartes au hasard parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10. Calculer la probabilité pour que la sommes des deux cartes tirées soit impaire sachant que :

Soit l'événement A="la sommes des deux cartes tirées est impaire"

- On tire les deux cartes ensemble.

Dans ce cas $\Omega = \{toutes\ les\ combinaisons\ de\ deux\ cartes\ parmi 10\}$
donc $card\,(\Omega) = C_{10}^2 = 45$. Soit l'événement A="la sommes des deux cartes tirées est impaire"
$card(A) = 5 \times 5 = 25$ puisque la somme est paire si l'un des nombres est pair et l'autre est impair comme il ya 5 nombre pairs et 5 nombres impairs alors 5×5, finalement $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

- On fait un tirage sans répétition des deux cartes l'une après l'autre.

Dans ce cas $card\,(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90, card\,(A) = 25 + 25 = 50$; Il ya 5 possibilités de tirer un nombre pair et 5 possibilités de tirer un nombre impair donc $5 \times 5 = 25$. On peut aussi choisir un nombre impair puis un nombre pair alors 25+25=50 $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$

- On fait un tirage avec répétition des deux cartes l'une après l'autre.

$card\,(\Omega) = R_{10}^2 = 10^2 = 100, card\,(A) = 25 + 25 = 50\ .P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

Exercice 10 On lance une paire de dés bien équilibrés. Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité pour que : (a) la somme obtenue soit six; (b) un 1 apparaisse, (c) la somme obtenue soit inférieure ou égale à 4.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,6)\}$
X="les deux chiffres obtenus sont différents" $card(X) = 36 - 6 = 30$
(a) la somme obtenue soit six;
A="la somme obtenue est égale à six"=$\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$, $A{\cap}X = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,$
$P\,(A \mid X) = \frac{P(A\cap X)}{P(X)} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$
(b) un 1 apparaisse
B="un 1 apparaît"=$\{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(3,1),...,(6,1)\}$, $B{\cap}X = \{(1,2),...,(1,6),(2,1),(3,1)$
$P\,(B \mid X) = \frac{P(B\cap X)}{P(X)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$
(c) la somme obtenue soit inférieure ou égale à 4
C="la somme obtenue est inférieure ou égale à 4"=$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,1)\}$
$C \cap X = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,1)\}$
$P\,(C \mid X) = \frac{P(C\cap X)}{P(X)} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

Exercice 11 Un couple a décide d'avoir des enfants jusqu'à ce qu'il ait une fille. Mais dans aucun cas, il ne désire plus de quatre enfants. Sachant que le premier enfant n'a pas été une fille, quelle est la probabilité que ce couple ait finalement quatre enfants ?

$\Omega = \{F, GF, GGF, GGGF, GGGG\}$
$P\,(F) = \frac{1}{2}; P\,(GF) = \frac{1}{4}; P\,(GGF) = \frac{1}{8}; P\,(GGGF) = \frac{1}{16}; P\,(GGGG) = \frac{1}{16}$. (On utilise le principe des probabilités composées pour trouver ces résultats).
A="le premier enfant n'est pas une file"=$\{GF, GGF, GGGF, GGGG\}$
B="le couple a finalement quatre enfants"=$\{GGGF, GGGG\}$
$B \cap A = \{GGGF, GGGG\}$
$P\,(B \mid A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{GGGF,GGGG\})}{P(\{GF,GGF,GGGF,GGGG\})} = \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

Exercice 12 Les élèves d'une classe sont choisis au hasard l'un après l'autre pour subir un examen. Calculer la probabilité pour que l'on ait alternativement un garçon et une fille, sachant que :

- La classe est composée de 4 garçons et 3 filles. Pour choisir amternativement un garçon et une fille le premier élève doit etre un garçon;

A_1 =le premier élève est un garçons
A_2 =le 2ième élève est une fille
A_3 =le 3ième élève est un garçons
A_4 =le 4ième élève est une fille
A_5 =le 5ième élève est un garçons
A_6 =le 6ième élève est une fille
A_7 =le 7ième élève est un garçons
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_6 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)P(A_7 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) = \frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} =$

- La classe est composée de 3 garçons et 3 filles.

La meme chose sauf qu'ici on peut commencer par un garçon on trouve $\frac{1}{20}$ ou bien on commence par une fille on trouve $\frac{1}{20}$ alors la probabilité est la somme $\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$

Exercice 13 Dans un lycée, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1,60 m. On sait de plus que 60% des élèves sont des filles. Si l'on prend un élève au hasard et si celui-ci mesure plus de 1,60m, quelle est la probabilité pour que cet élève soit une fille?

G=" l'élève est un garçon" $P(G)=0,4$
F="l'élève est une fille " $P(F)=0,6$
M="l'élève mesure plus de 1,60m" On sait aussi que $P(M \mid G)=0.04$ et $P(M \mid F)=0.01$
On cherche $P(F \mid M)$
$P(F \mid M)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}=\frac{P(F)P(M|F)}{P(F)P(M|F)+P(G)P(M|G)}=\frac{0,6\times 0.01}{0,6\times 0.01+0,4\times 0.04}=\frac{3}{11}$

Exercice 14 Les probabilités pour que trois tireurs atteignent une cible sont respectivement $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$. Chacun tire une suele fois sur la cible.

- Calculer la probabilité pour que l'un d'eux exactement atteigne la cible.

Soient les événements $A=$ *le premier tireur atteint la cible*, $B=$ *le deuxième tireur atteint lacible* et $C=$ *le troisième tireur atteint lacible*,donc $X=$ *un tireur exactement atteint la cible* $=(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)$
$P(X)=P\left[(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\right]=P(A\cap B^c\cap C^c)+P(A^c\cap B\cap C^c)+P(A^c\cap B^c\cap C)$
$=P(A)P(B^c)P(C^c)+P(A^c)P(B)P(C^c)+P(A^c)P(B^c)P(C)=\frac{1}{6}\frac{3}{4}\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\frac{1}{4}\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{3}=\frac{31}{72}$

- Si seulement l'un d'eux a atteint la cible, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse du premier tireur?

On cherche $P(A \mid X)=\frac{P(A\cap X)}{P(X)}=\frac{P(A\cap B^c\cap C^c)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{6}\frac{3}{4}\frac{2}{3}}{\frac{31}{72}}=\frac{6}{31}$