Université Batna-2
Faculté des Mathématique et d'informatique
Département d'informatique
module : probabilités ($L3$)
Corrigé de **Série** $n:0$ (*analyse combinatoire*)

Exercice 1

- Evaluer :$P_4 = 4! = ...; A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = ...; C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = ...$
- Simplifier (1) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$; (2) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = n^2 + 3n + 2.$
- $A_n^2 = 72$ on a $A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$ donc $n^2 - n = 72$ implique

$n^2 - n - 72 = 0$ equation d'ordre 2 les solutions sont 9 et -8 et comme n doit etre positif alors $n = 9$.
$A_n^4 = 42A_n^2$
$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$ et $A_n^2 = n(n-1)$ donc si $n \neq 0$ et $n \neq 1$on trouve
$(n-2)(n-3) = 42$ implique $n^2 - 5n - 36 = 0$ les solutions 9 et -4 donc $n = 9$.
de meme façon on trouve $n = 5$.

Exercice 2

- Démontrer : (1) $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_n^{n-p}$,

(2) $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-1-p)!}$
$= \frac{(n-p)(n-1)!}{p(n-p)(p-1)!(n-1-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p(n-p)(p-1)!(n-1-p)!} = \frac{(n-p+p)(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)(n-1-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$
Soit E un ensemble de cardinal $n\,(n \in \mathbb{N})$, on note $P(E)$ la famille de toutes les parties de E.

- $P(E)$ contirnt l'ensemble vide,C_n^1 ensembles d'un seul élément,C_n^2 ensembles de deux éléments,...,C_n^{n-1}ensembles de $n-1$ éléments, l'ensemble E lui meme, donc le cardinal de $P(E)$ est donné par $1 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + 1 = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^2 = 2^n$.

Exercice 3 Un comité de 3 membres doit être formé, comprenant un représentant de chacune des catégories direction, personnel et consommateurs. S'il y a 3 représentants possibles parmi le personnel, 2 parmi les membres de la direction et 4 chez les consommateurs, évaluer le nombre de comités différents qui peuvent être formés en utilisant :

- Le principe fondamental de comptage; $3 \times 2 \times 4 = ...$
- Un diagramme arborescent.

Exercice 4 En supposant qu'il n'y a pas de répétitions, combien de nombres de trois chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9? Il y a $6 \times 5 \times 4 = ...$

- Combien de ces nombres sont inférieurs à 400? $2 \times 5 \times 4 = ...$
- Combien sont pairs? $5 \times 4 \times 2 = ...$
- Combien sont impairs? $4 \times 5 \times 4 = ...$
- Combien sont des multiples de 5? $4 \times 5 \times 1 = ...$

Exercice 5 Supposons qu'une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro.

- Combien de plaques différentes peut-on imprimer? $26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = ...$

Exercice 6 De combien de façons différentes peut-on répartire un groupe de 7 personnes

- sur une rangée de 7 chaises.$P_7 = 7! = ..$

Exercice 7 De combien de façons peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes parmi 7 hommes et 5 femmes? $C_7^3 \times C_5^2 = ...$

Exercice 8 Combien de salades différentes peuvent être préparées à partir d'un mélange de pomme, poire, banane et fraise?

la salade peut etre préparée à partir d'un seul type de fruit, ou bien 2,..., ou bien 4
donc $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 - 1 = ...$

Exercice 9 Calculer le coefficient constant du développement de l'expression $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(x^2\right)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{2k} x^{k-12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{3k-12}$
$3k - 12 = 0 \Rightarrow k = 4$ donc le coefficient constant est $C_{12}^4 = ...$

Exercice 10 Il peut remplir sa fiche de vœux par $A_{30}^{10} = \frac{30!}{(30-10)!} = ...$ façons.