1 Cours 1: Analyse Combinatoire

L'analyse combinatoire est l'étude des différentes manières de "ranger" ou de "combiner" des objets. Ces objets peuvent être des nombres, des individus, des lettres, etc.

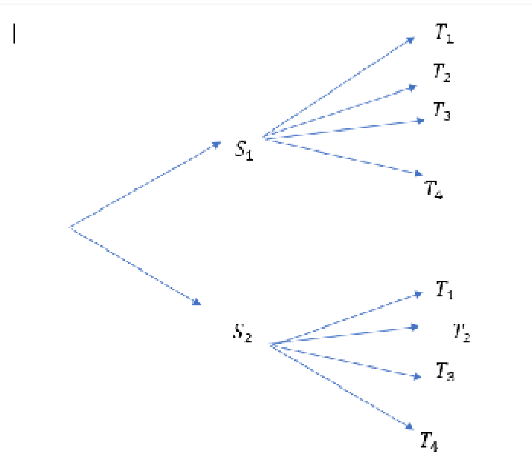
1.1 Principe fondamental de l'analyse combinatoire

Si une opération quelconque peut être effectuée de n_1 façons différentes, puis qu'une seconde opération peut être effectuée de n_2 façons différentes,... et qu'enfin une $k-ième$ opération peut être effectuée de n_k façons différentes alors les k opérations peuvent être effectuées dans l'ordre indiqué de $n_1\times$ $n_2... \times n_k$ façons différentes.

Example 1 *Si un individu possède 2 chemises et 4 cravates il peut alors choisir de* $2 \times 4 = 8$ *manières différentes, d'abord une chemise puis une cravate.*

Remark 2 *On utilise souvent un diagramme appelé diagramme arborescent.*

Représentons les chemises par : S_1, S_2 et les cravates par :T_1, T_2, T_3 et T_4.
$2022-09-29145634$

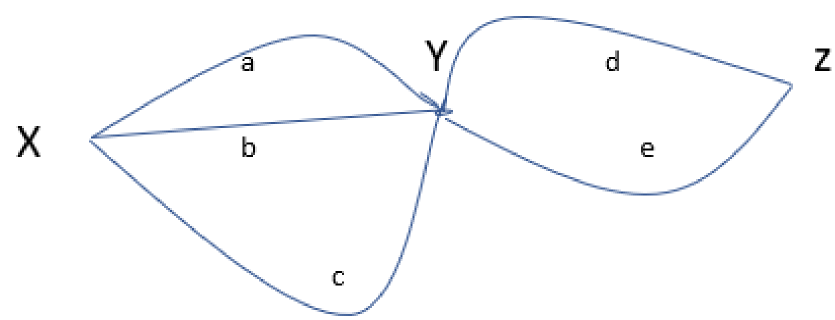


$_1.png$

Les différentes manières de choisir une chemise puis une cravate sont sont indiquées sur le diagramme arborescent.

Example 3 *Les localités X et Y sont reliées par trois routes a, b et c et les localités Y et Z sont par deux routes d et e. Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?*

$2022-09-29151526$



$_2.png$

$3 \times 2 = 6$, il y a 6 trajets possibles.

1.2 Permutations et Arrangements.

Soient n objets donnés et distincts et que l'on souhaite en aligner r d'entre eux sur une droite. Dans la mesure où il y a n manières de choisir le premier objet, puis, une fois ce choix fait $n-1$ manières de choisir le suivant ,..., et finalement $n-(r-1) = n-r+1$ de choisir le r ième objet, il résulte du principe fondamental de comptage que le nombre d'arrangement est

$$A_n^r = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-r+1) \tag{1}$$

. A_n^r est le nombre d'arrangements de n objets pris r à r.

Dans le cas particulier où n=r l'expression devient

$$P_n = A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\times 2 \times 1 = n! \tag{2}$$

L'expression (2) représente le nombre total de permutations possibles avec n objets pris par n.

L'expression (1) peut s'exprimer en termes de factocielles :

$$A_n^r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-r+1)\,(n-r)!}{(n-r)!} \tag{3}$$

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{4}$$

Remark 4

- *Si $r = n$, on voit que (2) et (3) ne sont cohérentes que si* $0! = 1$ *que nous prendrons effectivement comme définition de* $0!$.
- *Le nombre d'arragements A_n^r se note aussi P_n^r.*

Example 5 *Le nombre d'arrangements que l'on peut former en prenant 3 à 3 les7 lettres A, B, C, D, E, F et G est :*

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!} = 210.$$

Example 6 *Chqaue joueur d'une équipe de basket-ball ayant un maillot numéroté de 1 à 5. Combien d'équipes différentes peut constituer l'entraîneur avec un effectif de 5 joueurs. Il peut constituer*

$$P_5 = 5! = 120$$

équipes.

Example 7 *Dans l'exemple précédent l'entraîneur a maintenant 8 joueurs pour constituer son équipe de 5 joueurs il doit donc choisir 5-uplet, il y a donc* $A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = 6720$ *possibilités.*

Example 8 *Combien de nombres de 4 chiffres peut on former avec les chiffres 1,2,3,4,5,6,7,8,9 si les répétitions sont autorisées? et si les répétitions sont interdites?*

- Si les répétitions sont autorsées : on a

$$R_9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$$

nombres.

- Si les répétitions sont interdites :

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

nombres.

Remark 9 *Dans le cas général, si nous devons trouver le nombre d'arrangements possibles de r objets parmi n sans remise (sans répétitions) nous appliquerons la formule* $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ *et si les répétitions sont autorisées, nous parlerons d'arrangements avec remise ou arrangements avec répétitions. Dans ce cas le nombre d'arrangements est égal à*

$$R_n^k = n^k.$$

1.3 Les Permutations d'Objets Semblables

Si un ensemble est constitué de n objets dont $n_1$sont du même type et non distinguables etre eux, n_2 du même type (mais différents du type précédent) et non distinguables etre eux,... . Jusqu'à l'indice k (ici bien sûr $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$).

Le nombre de permutations qui nous apparaîtrons différentes sera:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}.$$

Example 10 *Le nombre de permutations qui nous apparaîtrons différentes dans le cas du 11 lettres du mot MISSISSIPPI qui est constitué de 1M, 4I, 4S et 2P est*

$$P_{11}^{1,4,4,2} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650.$$

1.4 Combinaisons sans répétitions

Dans le cas des permutations ou des arrangements nous nous intéressons à l'ordre dans lequel les objets sont rangés. Dans ces conditions abc est une permutation différente de cba. Dans de nombreux problèmes, cependant, la question qui se pose est de sélectionner des objets sans aucune référence à l'ordre dans lequel ils sont. De telles sélections sont dites "combinaisons". Dans un tel cas abc et cba constituent la même combinaison .

Le nombre de combinaisons de n objets r à r se note C_n^r ou $\binom{n}{r}$ et on a :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{5}$$

Car ; il y a A_n^r manières de tirer r objets parmi n en les ordonnant soit $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$. Une les r objets tirés, il y a $r!$ manières de les ordonner.

Il y a donc $\frac{A_n^r}{r!}$ manières de tirer r objets parmi n sans les ordonner ;

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Example 11 *Le nombre de façons différentes de choisir 3 cartes dans un groupe de 8 cartes est*

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56.$$

Example 12 *Le nombre de tous les sous-ensembles de 3 éléments de l'ensemble* $\{-1, 2, 4, 7, 23\}$ *est*

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10.$$

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$(la symétrie)
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ (formule de Pascal)

1.5 coefficients binomiaux

Les nombres définis par l'expression (5) sont appelés coefficients binomiaux parce qu'ils apparaissent au cours du développement du binôme de Newton.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^n y^{n-k}$$