Résumé de Chapitre 2

0.1 Variables aléatoires

Definition 1 *Une variable aléatoire X sur un ensemble fondamental Ω est une application de Ω dans IR, telle que l'inverse de chaque intervalle de IR soit un événement de Ω, i.e;*

$$\begin{aligned} X &: (\Omega, \mathcal{F}, P) \to IR \\ \omega &\to X(\omega) \\ \text{et } \forall I \text{ intervalle de } IR,\ X^{-1}(I) &\in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Remark 2
- *Si Ω est un ensemble discret toute fonction définie sur Ω à valeurs réelles est une variable aléatoire.*
- *Si Ω est non dénombrable certaines fonctions à valeurs réelles définie sur Ω ne sont pas des variables aléatoires.*
- Si X, Y sont deux variables aléatoires sur Ω et $k \in IR$ alors $X+Y$, $X+k$, kX, XY sont aussi des variables aléatoires.
- Une variable aléatoire qui peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs est dite variable aléatoire discrète, si elle peut prendre un nombre fini non dénombrable de valeurs, elle est dite variable aléatoire continue.

Example 3 (1) *On jette deux dés.* $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6,6)\}$.

Soit

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to IR \\ (\omega_1, \omega_2) &\to X(\omega_1, \omega_2) = \max\{\omega_1, \omega_2\} \end{aligned}$$

donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Soit

$$\begin{aligned} Y &: \Omega \to IR \\ (\omega_1, \omega_2) &\to Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

donc $Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Example 4 (2) *On lance une pièce de monnaie trois fois.*

$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$

$$\begin{aligned} X &= \textit{nombre total de pile} \\ Y &= \textit{nombre de pile lors des deux premiers essais} \\ Z &= \textit{nombre de pile lors des deux derniers essais} \end{aligned}$$

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$Z(\omega)$
PPP	3	2	2
PPF	2	2	1
PFP	2	1	1
FPP	2	1	2
PFF	1	1	0
FPF	1	1	1
FFP	1	0	1
FFF	0	0	0

alors $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$, $Y(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $Z(\Omega) = \{0,1,2\}$.

0.1.1 Loi de Probabilité

La loi de probabilité, $p(x)$, est une fonction qui associe à chaque valeurs x de la variable X sa probabilité $P(X = x)$. On écrit

$$p(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}).$$

- la loi de la variable x de l'exmple 1;

$p(1) = P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = 1\}) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$
$p(2) = P(X = 2) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = 2\}) = P(\{(2,1),(1,2),(2,2)\}) = \frac{3}{36}$
$p(3) = P(X = 3) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = 3\}) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(1,3),(2,3)\}) = \frac{5}{36}$

De mem façon on calcule $p(4)$, $p(5)$ et $p(6)$ et on écrit sous forme d'un tableau

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

et la loi de Y

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

et la loi de X de l'exemple 2,

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Remark 5 *La loi de probabilité* $p(x)$ *satisfait* $p(x_i) \geq 0$ *et* $\sum p(x_i) = 1$

0.1.2 Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X, la fonction défine par $F(x) = P(X \leq x)$.

Calculons les fonctions de répartition des exemples précédents;

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}=1$

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}=1$

0.1.3 Espérance mathématique

Notée $E(X)$ elle est définie par $E(X) = \sum x_i p(x_i)$.

- la variable de l'exemple 1;

$E(X) = \sum x_i p(x_i) = 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5.\frac{9}{36} + 6.\frac{11}{36} = 4.4722$

- la première variable de l'exemple 2 ;

$E(X) = \sum x_i p(x_i) = 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = 1.5$

Propriétés X et Y deux variables définies sur le mem espaces $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a, b sont deux réels. On a ;

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $E(X + a) = E(X) + a$.

0.1.4 Variance

Notée $Var(X)$ ou σ_X^2 est définie par

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\ &= \sum (x_i - E(x))^2 p(x_i) \end{aligned}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

0.1.5 Ecart-type

Noté σ_X est défini par $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

- Calculons la variance et l'écart type de la variable X de l'exemple 1;

On a $Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$ et $E(X) = 4.47$ alors $E(X)^2 = (4.47)^2 = 19.98$. On calcule $E\left(X^2\right)$;
$E\left(X^2\right) = \sum x_i^2 p(x_i) = 1^2.\frac{1}{36} + 2^2.\frac{3}{36} + 3^2.\frac{5}{36} + 4^2.\frac{7}{36} + 5^2.\frac{9}{36} + 6^2.\frac{11}{36} = 21.97$
finalement $Var(X) = 21.97 - 19.98 = 1.99$
l'écart $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.99} = 1.41$

Theorem 6 *X une variable aléatoire et k un nombre réel, on a*

- $Var(X+k) = Var(X)$
- $Var(kX) = k^2 Var(X)$
- $\sigma_{X+k} = \sigma_X$
- $\sigma_{kX} = |k|\,\sigma_X$

Remark 7 *Il ya une interprétation physique de la moyenne (espérance) et de la variance ; supposons qu'en chaque point x_i de l'axe des x, soit placée une unité de masse $p(x_i)$ la moyenne et la variance sont alors respectivement le centre de gravité et le moment d'inertie du système.*

0.2 Variables aléatoires continues

Supposons que X est une variable aléatoire dont l'ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est l'ensemble de points d'un intervalle.

- La loi de X est donnée par sa fonction de densité $f(x)$ qui vérifie $\forall x \in IR$, $f(x) \geq 0$ et $\int_{IR} f(x)\,dx = 1$.

donc $P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$

- L'espérance $E(X) = \int_{IR} x f(x)\,dx$
- La variance $Var(X) = \int_{IR} (x - E(X))^2 f(x)\,dx = \int_{IR} x^2 f(x)\,dx - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$
- L'écart type $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.
- La fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.